АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ НЕГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОФСОЮЗОВ»

И.Г. ПОЛЕГЕНЬКО

ЭКОНОМЕТРИКА

ПРАКТИКУМ
для самостоятельной работы

Алматы
2014

Автор-составитель:
ПОЛЕГЕНЬКО И.Г.,
кандидат технических наук, доцент кафедры экономики,
информатики и математики Алматинского филиала НОУ ВПО
«Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

Рекомендовано к печати
Учебно-методическим советом Алматинского филиала
Санкт-Петербургского Гуманитарного университета профсоюзов
от « 24 » декабря 2014 г. Протокол № 3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эконометрика – наука, изучающая количественные и качественные экономические взаимосвязи с помощью математических и статистических методов и моделей. Современное определение предмета эконометрики было выработано в уставе Эконометрического общества, которое главными целями назвало использование статистики и математики для развития экономической теории. Теоретическая эконометрика рассматривает статистические свойства оценок и испытаний, в то время как прикладная эконометрика занимается применением эконометрических методов для оценки экономических теорий. Эконометрика даёт инструментарий для экономических измерений, а также методологию оценки параметров моделей микро- и макроэкономики. Кроме того, эконометрика активно используется для прогнозирования экономических процессов как в масштабах экономики в целом, так и на уровне отдельных предприятий. При этом эконометрика является частью экономической теории, наряду с макро- и микроэкономикой.

Термин «эконометрика» состоит из двух частей: «эконо» – от «экономика» и «метрика» – от «измерение». Эконометрика входит в обширное семейство дисциплин, посвящённых измерениям и применению статистических методов в различных областях науки и практики. К этому семейству относятся, в частности, биометрия, технометрика, наукометрия, психометрия, хемометрия, квалиметрия. Особняком стоит социометрия – этот термин закрепился за статистическими методами анализа взаимоотношений в малых группах, то есть за небольшой частью такой дисциплины, как статистический анализ в социологии и психологии.

Сегодня эконометрика занимает достойное место в ряду экономических наук. В мире выпускается ряд научных журналов, полностью посвящённых эконометрике, в том числе: Journal of Econometrics (Швеция), Econometric Reviews (США), Econometrica (США), Sankhya. Indian Journal of Statistics. Ser.D. Quantitative Economics (Индия), Publications Econometriques (Франция). Эконометрику изучают в ведущих мировых университетах, пришло понимание, что без эконометрических методов невозможно проводить современный макро- и микроэкономический анализ.

На русском языке также существуют специализированные журналы. К ним относятся «Прикладная эконометрика» и «Квантиль». Отдельные публикации по эконометрике появляются в журналах «Экономика и математические методы», «Вопросы статистики», «Вопросы экономики» и некоторых других.

Ранее в России по ряду причин эконометрика не была сформирована как самостоятельное направление научной и практической деятельности. Хотя в настоящее время начинают развертываться эконометрические исследования. В связи с этим начинается широкое преподавание этой дисциплины.

Цель изучения дисциплины «Эконометрика» – формирование целостного взгляда на математику как основу для создания экономико-математических моделей и методов управления на базе исследования поведения экономических характеристик.

Задачами изучения являются изучение количественной стороны экономических явлений и процессов средствами математического и статистического анализа, а именно: освоение теоретических вопросов, методов расчета и практической реализации расчетов в MS Excel.

Дисциплина «Эконометрика» опирается на материал дисциплин: «Математический анализ», «Линейная алгебра», «Теория вероятностей и математическая статистика», «Методы оптимальных решений», «Информатика», «Статистика».

Освоение дисциплины «Эконометрика» необходимо для дисциплин «Биржевое дело», «Управление финансовыми рисками», «Организация инвестиционной и инновационной деятельности на предприятии».

Процесс изучения дисциплины направлен на овладение студентами следующих ***компетенций***:

- владение культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения (ОК-1);
- способность анализировать социально-значимые проблемы и процессы, происходящие в обществе, и прогнозировать возможное их развитие в будущем (ОК-4);
- умение использовать нормативные правовые документы в своей деятельности (ОК-5);
- способность логически верно, аргументировано и ясно строить устную и письменную речь (ОК-6);
- готовность к кооперации с коллегами, работе в коллективе (ОК-7);
- способность находить организационно-управленческие решения и готовность нести за них ответственность (ОК-8);
- способность к саморазвитию, повышению своей квалификации и мастерства (ОК-9);
- осознание социальной значимости своей будущей профессии, обладание высокой мотивацией к выполнению профессиональной деятельности (ОК-11);
- способность понимать сущность и значение информации в развитии современного информационного общества, сознавать опасности и угрозы, возникающие в этом процессе, соблюдать основные требования

информационной безопасности, в том числе защиты государственной тайны (ОК-12);

- владение основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации, наличие навыков работы с компьютером как средством управления информацией, способность работать с информацией в глобальных компьютерных сетях (ОК-13);

- владение одним из иностранных языков на уровне не ниже разговорного (ОК-14);

- способность собрать и проанализировать исходные данные, необходимые для расчета экономических и социально-экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-1);

- способность на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-2);

- способность выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

- способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения поставленных экономических задач (ПК-4);

- способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

- способность на основе описания экономических процессов и явлений строить стандартные теоретические и эконометрические модели, анализировать и содержательно интерпретировать полученные результаты (ПК-6);

- способность анализировать и интерпретировать финансовую, бухгалтерскую и иную информацию, содержащуюся в отчетности предприятий различных форм собственности, организаций, ведомств и использовать полученные сведения для принятия управленческих решений (ПК-7);

- способность анализировать и интерпретировать данные отечественной и зарубежной статистики о социально-экономических процессах и явлениях, выявлять тенденции изменения социально-экономических показателей (ПК-8);

- способность, используя отечественные и зарубежные источники информации, собрать необходимые данные, проанализировать их и подготовить информационный обзор и/или аналитический отчет (ПК-9);

- способность использовать для решения аналитических и исследовательских задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-10);

- способность организовать деятельность малой группы, созданной для реализации конкретного экономического проекта (ПК-11);

- способность использовать для решения коммуникативных задач современные технические средства и информационные технологии (ПК-12);

- способность критически оценить предлагаемые варианты управленческих решений, разработать и обосновать предложения по их совершенствованию с учетом критериев социально-экономической эффективности, рисков и возможных социально-экономических последствий (ПК-13).

В результате изучения дисциплины **студент должен**:

1) ***знать:***

- методы и задачи эконометрики;
- структуру эконометрических моделей;
- теории гипотез;
- корелляции;
- оценки статистических параметров;

2) ***уметь:***

- использовать общие положения эконометрической теории для исследования круга проблем математического моделирования;
- производить расчёты по основным моделям;
- оценивать качество построенных моделей;
- интерпретировать полученные результаты;

3) ***владеть***:

- навыками проведения расчётов в MS Excel.

Моделирование экономических процессов сопряжено с рядом трудностей. Это и многообразие экономической жизни, и конфликт интересов различных социальных групп, и внешний фактор в силу открытости современной экономики. Возникает определенный пессимизм по отношению к возможностям и полезности количественного моделирования, стремление к качественному описанию взаимосвязей экономических величин. Тем не менее, конкретные решения, влекущие материальную ответственность, не могут опираться на качественные рассуждения и требуют точных вычислений. Востребованные практикой средства анализа данных, на которые можно опираться в процессе принятия решений, предоставляет эконометрика. В этой науке соединились возможности экономической теории и математики.

1. ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЫ. ВЫБОР ВАРИАНТА

Контрольную работу следует выполнять в ученических тетрадях или на отдельных листах. Титульный лист включает: название института, название кафедры, название контрольной работы, фамилию, имя, отчество и личный шифр студента. Задания могут выполняться с применением компьютера. Вычисления производятся с точностью до трех знаков после запятой.

Номер варианта № определяется по двум последним цифрам nn Вашей зачетной книжки по правилу:

№=20, если nn=00, №=nn, если $00 < nn \le 20$; №=nn-20, если $20 < nn \le 40$; №=nn-40, если $40 < nn \le 60$ и т.д.

Приведенные примеры являются простейшими и рассчитаны на неискушенного слушателя, впервые столкнувшегося с методологическим аппаратом эконометрики. Малое число наблюдений в заданиях позволяет практически «вручную» (на калькуляторе) выполнить необходимые расчеты. Поставленные задания носят скорее технический характер, хотя приведенные в практикуме примеры связаны с реальной экономикой. На начальном этапе изучения эконометрики эта работа необходима. Слушатель учится правильно читать листинги эконометрических отчетов, понимает, как получена та или иная характеристика модели. Эта работа делает более доступным лекционный материал. Нечто схожее наблюдается в линейном программировании, когда графически, с помощью симплекс-таблиц, методом «потенциалов», «венгерским» методом и т.д. решают определенные задачи, хотя давно уже доступны специализированные пакеты для решения задач линейного программирования.

Использование эконометрического пакета позволило бы существенно поднять планку заданий и максимально приблизить их к практике современных эконометрических исследований.

Выполнение работы следует начинать с проработки методических указаний, параллельно изучая теорию в соответствии со стандартом и рабочей программой курса. Затем выполняются задания своего варианта. При подготовке к экзамену рекомендуется письменно ответить на вопросы для самопроверки.

В предлагаемом практикуме представлены контрольные задания по пяти основным темам, соответствующим стандарту по эконометрике. В первом задании предлагается построить линейную регрессионную модель с одним фактором, влияющим на результат (парная регрессия). В рамках построенной модели требуется получить оценки параметров, оценить качество модели. Во втором задании необходимо построить нелинейную модель с теми же исходными данными. В третьем задании число регрессоров (факторов) увеличивается до двух (множественная регрессия). Необходимо оценить параметры, проверить нулевые гипотезы относительно значений параметров, оценить качество множественной регрессии, сделать прогноз. В четвертом задании предлагается идентифицировать параметры системы одновременных уравнений. В пятом задании изучается автокорреляционная функция временного ряда и прогнозирование в условиях авторегрессии.

По каждому из пяти заданий предлагаются методические указания, которые включают теоретические выкладки и примеры решения эконометрических задач. Уровень сложности предлагаемых заданий и относительно небольшое количество наблюдений позволяют выполнить предлагаемую работу с помощью обычного калькулятора. Допускается использование специализированных пакетов программ, например оболочки EXEL.

2. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

2.1. Линейная регрессионная модель

Для анализа работы торгового предприятия произведено 10 наблюдений числа покупателей $\mathbf{x_t}$ и выручки $\mathbf{y_t}$ (табл.1):

Таблица 1

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{x_t}$	31	75	89	26	35	73	91	21	56	21
$\mathbf{y_t}$	64	100	103	50	63	95	109	43	93	37

Предполагается, что зависимую переменную (выручку) и независимую (число покупателей в магазине) связывает линейное регрессионное уравнение $y_t = a + bx_t + \varepsilon_t$.

1. Построим диаграмму рассеяния наблюдений (рис.1), откладывая на координатной плоскости 10 точек с координатами (31; 64), (75; 100),…, (21; 37):

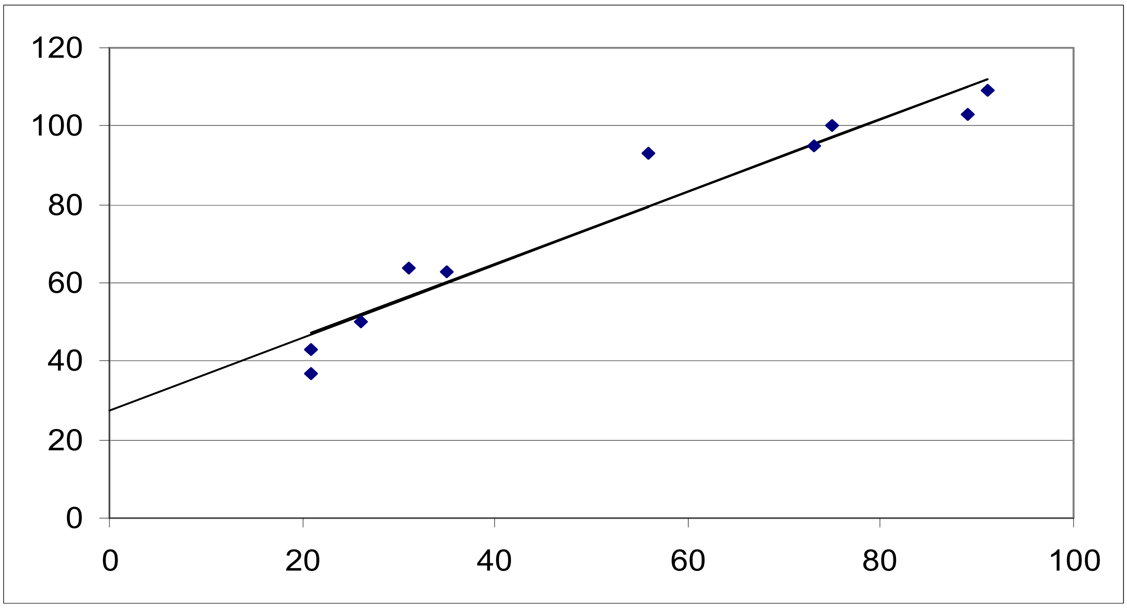

Рис.1 Диаграмма рассеяния наблюдений (точки), линейный тренд (сплошная прямая)

По типу диаграммы рассеяния можно предположить, что между наблюдениями **x** и **y** существует линейная зависимость.

2. Применяя метод наименьших квадратов, получим оценки параметров **a** и **b** линейной регрессионной модели:

Оценка параметра **b** вычисляется по формуле

$$\hat{b} = \frac{\overline{xy} - \bar{x} \cdot \bar{y}}{\overline{x^2} - \bar{x}^2} = \frac{4589{,}8 - 51{,}8 \cdot 75{,}7}{3403{,}6 - 51{,}8^2} = 0{,}928,$$

где $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t = 51{,}8$; $\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} y_t = 75{,}7$; $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t^2 = 3403{,}6$; $\overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} x_t y_t = 4589{,}8$;
n – число наблюдений. В представленном примере n=10.

Оценка параметра **a** вычисляется по формуле

$$\hat{a} = \bar{y} - \hat{b} \cdot \bar{x} = 75{,}7 - 0{,}928 \cdot 51{,}8 = 27{,}626.$$

Для получения оценок параметров модели удобно использовать табл.2:

Таблица 2

t	x_t	y_t	x_t^2	y_t^2	$x_t y_t$	$\hat{y}_t$	e_t	e_t^2
1	31	64	961	4096	1984	56,396	7,604	57,817
2	75	100	5625	10000	7500	97,231	2,769	7,667
3	89	103	7921	10609	9167	110,224	-7,224	52,186
4	26	50	676	2500	1300	51,756	-1,756	3,083
5	35	63	1225	3969	2205	60,109	2,891	8,361
6	73	95	5329	9025	6935	95,375	-0,375	0,141
7	91	109	8281	11881	9919	112,080	-3,080	9,487
8	21	43	441	1849	903	47,116	-4,116	16,938
9	56	93	3136	8649	5208	79,598	13,402	179,617
10	21	37	441	1369	777	47,116	-10,116	102,326
Σ	518	757	34036	63947	45898	757,000	0,000	437,623
Σ/n	51,8	75,7	3403,6	6395	4589,8	75,700	0,000	

Можно сделать следующие выводы:

- среднее число покупателей 51,8;
- средняя выручка 75,7 ед.;
- каждый покупатель приносит в среднем 0,928 ед. выручки.

3. Уравнение прогнозных значений имеет вид:

$$\hat{y}_t = \hat{a} + \hat{b} \cdot x_t = 27{,}626 + 0{,}928 \cdot x_t.$$

Заполним соответствующий столбец в таблице и построим график прогнозных значений на диаграмме рассеяния.

4. Остатки линейной регрессионной модели определим по формуле

$$e_t = y_t - \hat{y}_t$$

Оценка дисперсии остатков равна

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-2} = \frac{437{,}623}{10-2} = 54{,}703\,.$$

Оценка дисперсии $\hat{a}$ равна

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2\,\overline{x^2}}{n\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} = 25{,}846\ .$$

Оценка дисперсии $\hat{b}$ равна

$$\hat{\sigma}_{\hat{b}}^2 = \frac{\hat{\sigma}^2}{n\left(\overline{x^2} - \overline{x}^2\right)} = 0{,}00759\ .$$

5. Гипотеза $a = a_0$ будет проверяться исходя из того, что случайная величина

$$t = \frac{\hat{a} - a_0}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}$$

в нормальной классической линейной регрессионной модели подчиняется распределению Стьюдента с (n-2) степенями свободы. Если $|t|$ окажется меньше некоторого критического значения $\mathbf{t_\alpha}$, которое находится по таблицам критических точек распределения Стьюдента, то гипотеза принимается. Если больше, то гипотеза отвергается. Таблица критических точек распределения Стьюдента приводится в *Приложении 1*. По таблице находим, что для уровня значимости 0,05 и восьми степеней свободы

t_α=2,306.

Проверим нулевую гипотезу H_0: **a**=0, при конкурирующей $H_1: a \neq 0$. Вычислим

$$t = \frac{27{,}626}{\sqrt{25{,}846}} = 5{,}434$$

Поскольку 5,434>2,306, то нулевая гипотеза отвергается.

Выше сказанное справедливо и для параметра **b**. Проверим гипотезу **b**=1, которая означает, что один покупатель в среднем приносит торговой точке единицу выручки. Вычислим

$$\left|\frac{0{,}928 - 1}{\sqrt{0{,}00759}}\right| = 0{,}826\ .$$

Поскольку 0,826<2,306, то гипотеза принимается.

6. Из неравенств

$$\left|\frac{\hat{a}-a}{\hat{\sigma}_{\hat{a}}}\right| < t_\alpha \text{ и } \left|\frac{\hat{b}-b}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| < t_\alpha,$$

находим

$$\hat{a} - t_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{a}} < a < \hat{a} + t_a \hat{\sigma}_{\hat{a}}$$

и

$$\hat{b} - t_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{b}} < b < \hat{b} + t_\alpha \hat{\sigma}_{\hat{b}}.$$

Подставляя найденные ранее значения, находим 95% доверительные интервалы

$$15{,}903 < a < 39{,}350 \text{ и } 0{,}727 < b < 1{,}129.$$

Последнее неравенство означает, что с вероятностью 0,95 средняя выручка, которую приносит один покупатель, принадлежит интервалу (0,727; 1,129).

7. Коэффициент детерминации равен отношению суммы квадратов отклонений регрессии к общей сумме квадратов отклонений:

$$R^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} (\hat{y}_t - \bar{y})^2}{\sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2}.$$

Можно доказать, что для парной регрессии данное отношение равно

$$R^2 = \hat{b}^2 \frac{S_x^2}{S_y^2} = 0{,}934,$$

где $S_x^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2 = 720{,}36$ и $S_y^2 = \overline{y^2} - \bar{y}^2 = 664{,}21$ - выборочные дисперсии.

В построенной модели дисперсия результата на 93,4% объясняется линейной зависимостью выручки от числа покупателей и только на 6,6% дисперсией неучтенных факторов. Полученное значение коэффициента детерминации близко к единице. Поэтому связь между **x** и **y** сильная (число покупателей заметно влияет на выручку данного предприятия).

8. Если фактор (в нашей задаче это число покупателей) не влияет на результат (выручку), тогда дисперсионное отношение

$$F = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2} = 113{,}422$$

в классической нормальной линейной регрессионной модели подчиняется распределению Фишера с (1; n-2) числом степеней свободы. По таблице критических точек распределения Фишера (*Приложение 2*) находим, что для уровня значимости α=0,05 величина F_α=10,128 при числе степеней свободы (1;

8). Найденное значение $F >> F_\alpha$, что указывает на сильное влияние фактора на результат.

9. Допустим, что планируется расширение предприятия, при этом среднее количество покупателей должно вырасти на 20% и составит $x_{11} = 51{,}8 \cdot 1{,}2 = 67$ чел. Необходимо определить среднюю выручку, которую в этом случае получит предприятие. Выручку найдем из прогнозного уравнения

$$\hat{y}_{11} = \hat{a} + \hat{b} \cdot x_{11} = 27{,}626 + 0{,}928 \cdot 67 = 89{,}807.$$

Определим, насколько точным является данный прогноз. Для этого построим 95% доверительный интервал для прогнозируемой выручки:

$$\hat{y}_{11} - \hat{\sigma}_{e_{11}} \cdot t_\alpha < y_{11} < \hat{y}_{11} + \hat{\sigma}_{e_{11}} \cdot t_\alpha$$

$$71{,}66 < y_{11} < 107{,}953,$$

где $\hat{\sigma}_{e_{11}} = \sigma\sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_{11} - \bar{x})^2}{nS_x^2}} = 7{,}869$ – стандартное отклонение e_{11}.

10. Эластичность в произвольной точке определяется по формуле

$$\varepsilon_{x_t} = \hat{y}_t' \frac{x_t}{\hat{y}_t},$$

где $\hat{y}_t' = (\hat{a} + \hat{b}x_t)' = \hat{b}$ – производная по фактору **x**. В точке $\mathbf{x_{11}}$ эластичность равна

$$\varepsilon_{x_{11}} = \hat{b}\frac{x_{11}}{\hat{a} + \hat{b}x_{11}} = 0{,}692.$$

Найденная величина означает, что при увеличении числа покупателей на 1% выручка возрастает в среднем на 0,692%. Справедливо это в окрестности точки x_{11}.

2.2. Нелинейная модель. Линеаризация

Построим нелинейную регрессионную модель в виде

$$y_t = a \cdot x_t^b \cdot \varepsilon_t.$$

Тип нелинейной зависимости определяется формой диаграммы рассеяния, содержанием и теоретической моделью соответствующего экономического процесса. Иногда приходится применять различные нелинейные модели, а затем выбирать из них лучшую.

1. Предложенная модель становится линейной после логарифмирования:

$$\ln y_t = \ln a + b \ln x_t + \ln \varepsilon_t.$$

Обозначая $Y_t = \ln y_t$; $A = \ln a$; $X_t = \ln x_t$; $u_t = \ln \varepsilon_t$, получим

$$Y_t = A + bX_t + u_t .$$

Преобразуем таблицу исходных данных и, опираясь на результаты вычислений в табл. 3, вычислим оценки

$$\widehat{A} = 1{,}779; \;\; \widehat{a} = e^{\widehat{A}} = 5{,}923; \widehat{b} = 0{,}654 .$$

Таблица 3

t	$X_t = \ln x_t$	$Y_t = \ln y_t$	X_t^2	Y_t^2	$X_t Y_t$	$\widehat{Y}_t$	$\widehat{y}_t = e^{\widehat{Y}_t}$	$(y_t - \widehat{y}_t)^2$
1	3,434	4,159	11,792	17,296	14,282	4,023	55,878	65,961
2	4,317	4,605	18,641	21,208	19,883	4,601	99,546	0,206
3	4,489	4,635	20,148	21,481	20,804	4,712	111,328	69,347
4	3,258	3,912	10,615	15,304	12,746	3,908	49,810	0,036
5	3,555	4,143	12,640	17,166	14,730	4,102	60,491	6,294
6	4,290	4,554	18,408	20,738	19,538	4,583	97,803	7,855
7	4,511	4,691	20,348	22,009	21,162	4,727	112,956	15,652
8	3,045	3,761	9,269	14,147	11,451	3,769	43,321	0,103
9	4,025	4,533	16,203	20,544	18,245	4,410	82,243	115,706
10	3,045	3,611	9,269	13,039	10,994	3,769	43,321	39,951
Σ	38	42,604	147,334	182,930	163,834	42,604	756,697	321,112
Σ/n	3,797	4,260	14,733	18,293	16,383	4,260	75,670	

Уравнение прогнозных значений имеет вид

$$\widehat{Y}_t = \underset{(0{,}199)}{1{,}779} + \underset{(0{,}052)}{0{,}654} \cdot X_t .$$

В уравнении в скобках показаны стандартные отклонения оценок параметров.

Прогнозирование в нелинейной модели может осуществляться по формуле

$$\widehat{y}_t = 5{,}923 \cdot x_t^{0{,}654}$$

или с помощью экспоненты

$$\widehat{y}_t = e^{\widehat{Y}_t} .$$

2. Вычислим коэффициент детерминации

$$R^2 = \widehat{b}^2 \frac{S_X^2}{S_Y^2} = 0{,}654 \frac{0{,}317}{0{,}142} = 0{,}952 ,$$

где $S_X^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$ и $S_Y^2 = \overline{Y^2} - \overline{Y}^2$.

Дисперсионное отношение

$$F = (n-2)\frac{R^2}{1-R^2} = 158{,}484 .$$

Найденное значение F>> F_α=10,128, что указывает на сильное влияние фактора на результат в логарифмической модели.

Чтобы сравнить по качеству нелинейную и линейную модель, вычислим сумму квадратов отклонений нелинейного прогноза от наблюдений

$$\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2=321{,}112,$$

и определим отношение, которое называют псевдодетерминацией:

$$\hat{R}^2=1-\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\hat{y}_t)^2}{\sum_{t=1}^{n}(y_t-\bar{y})^2}=1-\frac{321{,}112}{6642{,}1}=0{,}952\,.$$

Сравнивая значение 0,952 с коэффициентом детерминации линейной модели 0,934, делаем вывод о том, что нелинейная модель лучше согласуется с данными наблюдений.

3. Как и в предыдущем задании, считаем, что планируется расширение предприятия, при этом среднее количество покупателей должно вырасти на 20% и составит $x_{11}=51{,}8\cdot 1{,}2=67$ чел. Прогноз средней выручки в нелинейной модели

$$\hat{y}_{11}=5{,}923\cdot 67^{0{,}654}=92{,}471\,.$$

Определим, насколько точным является данный прогноз. Для этого построим 95% доверительный интервал для логарифма прогнозируемой выручки:

$$\hat{Y}_{11}-\hat{\sigma}_{e_{11}}\cdot t_\alpha<Y_{11}<\hat{Y}_{11}+\hat{\sigma}_{e_{11}}\cdot t_\alpha$$

$$4{,}298<Y_{11}<4{,}756,$$

где $\hat{\sigma}_{e_{11}}=\sigma\sqrt{1+\frac{1}{n}+\frac{(X_{11}-\bar{X})^2}{nS_X^2}}=0{,}099$ – стандартное отклонение e_{11};

$X_{11}=\ln x_{11}=\ln 67=4{,}205$; $\hat{Y}_{11}=1{,}779+0{,}654\cdot 4{,}205=4{,}527$.

Для прогнозируемой выручки в рамках нелинейной модели доверительный интервал имеет вид

$$e^{4{,}298}<y_{11}<e^{4{,}756}$$

$$73{,}564<y_{11}<116{,}238$$

4. Для степенной нелинейной модели эластичность в произвольной точке определяется по формуле

$$\varepsilon_{x_t} = \hat{y}_t' \frac{x_t}{y_t} = \hat{a} \cdot \hat{b} \cdot x_t^{\hat{b}-1} \frac{x_t}{\hat{a} \cdot x_t^{\hat{b}}} = \hat{b} = 0{,}654$$

Найденная величина означает, что при увеличении среднего числа покупателей на 1% выручка возрастает в среднем на 0,654%.

5.

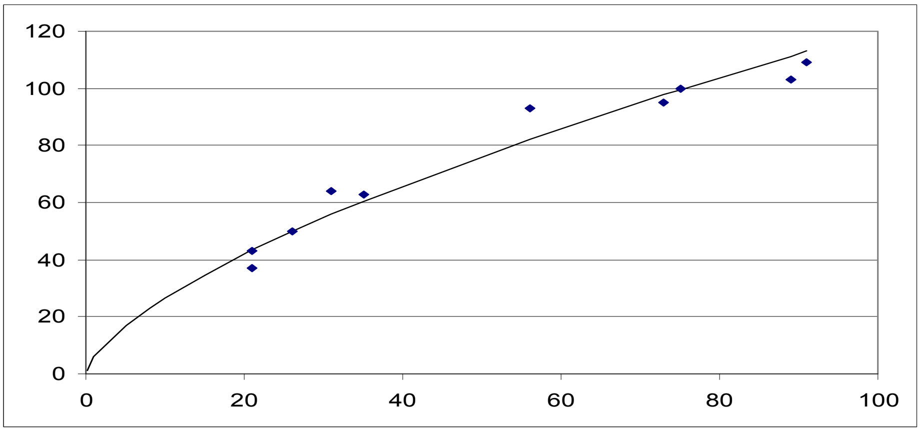

Рис.2. Диаграмма рассеяния наблюдений (точки), нелинейный тренд (сплошная линия)

2.3. Множественная регрессия

На выручку в торговом предприятии могло повлиять наличие или отсутствие рекламы. Чтобы определить эффективность рекламных мероприятий введем фиктивную переменную $\mathbf{z_t}$, которая принимает значение 1, когда реклама применялась, и 0, когда рекламы не было. Данные наблюдений представлены в табл.4.

Таблица 4

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mathbf{x_t}$	31	75	89	26	35	73	91	21	56	21
$\mathbf{z_t}$	0	1	1	0	0	0	1	1	1	0
$\mathbf{y_t}$	64	100	103	50	63	95	109	43	93	37

1. Линейное уравнение множественной регрессии при наличии двух факторов, влияющих на результат, имеет вид

$$y_t = a + b \cdot x_t + c \cdot z_t + \varepsilon_t\,.$$

В соответствии с МНК, оценки параметров множественной регрессии являются решением системы нормальных уравнений:

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{b} \cdot \overline{x} + \hat{c} \cdot \overline{z} = \overline{y} \\ \hat{a} \cdot \overline{x} + \hat{b} \cdot \overline{x^2} + \hat{c} \cdot \overline{xz} = \overline{xy} \\ \hat{a} \cdot \overline{z} + \hat{b} \cdot \overline{xz} + \hat{c} \cdot \overline{z^2} = \overline{zy} \end{cases}$$

Коэффициенты при неизвестных в данной системе уравнений найдем с помощью табл.5:

Таблица 5

t	x_t	z_t	y_t	x_t^2	z_t^2	y_t^2	x_tz_t	x_ty_t	y_tz_t	$\hat{y}_t$	e_t	e_t^2
1	31	0	64	961	0	4096	0	1984	0	56,109	7,891	62,275
2	75	1	100	5625	1	10000	75	7500	100	97,495	2,505	6,277
3	89	1	103	7921	1	10609	89	9167	103	110,346	-7,346	53,969
4	26	0	50	676	0	2500	0	1300	0	51,519	-1,519	2,306
5	35	0	63	1225	0	3969	0	2205	0	59,780	3,220	10,366
6	73	0	95	5329	0	9025	0	6935	0	94,664	0,336	0,113
7	91	1	109	8281	1	11881	91	9919	109	112,182	-3,182	10,127
8	21	1	43	441	1	1849	21	903	43	47,924	-4,924	24,242
9	56	1	93	3136	1	8649	56	5208	93	80,053	12,947	167,625
10	21	0	37	441	0	1369	0	777	0	46,929	-9,929	98,579
Σ	518	5	757	34036	5	63947	332	45898	448	757	0,0	435,880
Σ/n	51,8	0,5	75,7	3403,6	0,5	6394,7	33,2	4589,8	44,8	75,7	0,0	

С найденными коэффициентами система нормальных уравнений приобретает вид

$$\begin{cases} \hat{a} + \hat{b} \cdot 51{,}8 + \hat{c} \cdot 0{,}5 = 75{,}7 \\ \hat{a} \cdot 51{,}8 + \hat{b} \cdot 3403{,}6 + \hat{c} \cdot 33{,}2 = 4589{,}8 \\ \hat{a} \cdot 0{,}5 + \hat{b} \cdot 33{,}2 + \hat{c} \cdot 0{,}5 = 44{,}8. \end{cases}$$

Полученная система уравнений может быть решена методом Крамера.

Найдем определитель матрицы коэффициентов при неизвестных

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 51{,}8 & 0{,}5 \\ 51{,}8 & 3403{,}6 & 33{,}2 \\ 0{,}5 & 33{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 126{,}8.$$

Заменим первый столбец свободными коэффициентами и вычислим определитель

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 75{,}7 & 1{,}8 & 0{,}5 \\ 4589{,}8 & 3403{,}6 & 33{,}2 \\ 44{,}8 & 33{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 3506{,}160.$$

Аналогично заменим второй и третий столбцы свободными коэффициентами и вычислим определители

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 75{,}7 & 0{,}5 \\ 51{,}8 & 4589{,}8 & 33{,}2 \\ 0{,}5 & 44{,}8 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 116{,}4$$

и

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 51{,}8 & 75{,}7 \\ 51{,}8 & 3403{,}6 & 4589{,}8 \\ 0{,}5 & 33{,}2 & 44{,}8 \end{vmatrix} = 126{,}16.$$

В соответствии с методом Крамера оценки параметров равны:

$$\hat{a} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3506{,}16}{126{,}8} = 27{,}651;$$

$$\hat{b} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{116{,}4}{126{,}8} = 0{,}918;$$

$$\hat{c} = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{126{,}16}{126{,}8} = 0{,}995.$$

Дисперсия остатков оценивается по формуле

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}{n-k-1} = \frac{435{,}880}{10-2-1} = 62{,}269\,.$$

Оценки дисперсий параметров и их стандартные отклонения равны:

$$\hat{\sigma}_{\hat{a}}^2 = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{A_{11}}{n \cdot \Delta} = 62{,}269 \cdot \frac{599{,}56}{10 \cdot 126{,}8} = 29{,}443\,; \qquad \hat{\sigma}_{\hat{a}} = 5{,}426\,;$$

$$\sigma_{\hat{b}}^2 = \sigma^2 \cdot \frac{A_{22}}{n \cdot \Delta} = 0{,}0123\,; \qquad \hat{\sigma}_{\hat{b}} = 0{,}111\,;$$

$$\sigma_{\hat{c}}^2 = \hat{\sigma}^2 \cdot \frac{A_{33}}{n \cdot \Delta} = 35{,}375\,; \qquad \sigma_{\hat{c}}^2 = 5{,}948\,,$$

где

$$A_{11} = \begin{vmatrix} \overline{x^2} & \overline{xz} \\ \overline{xz} & \overline{z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3403{,}6 & 33{,}2 \\ 33{,}2 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 599{,}56\,; \; A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{z} \\ \bar{z} & \overline{z^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}5 \end{vmatrix} = 0{,}25\,;$$

$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & \bar{x} \\ \bar{x} & \overline{x^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 51{,}8 \\ 51{,}8 & 3403{,}6 \end{vmatrix} = 720{,}36$ – соответствующие алгебраические дополнения.

Прогнозное уравнение имеет вид

$$\hat{y}_t = \hat{a} + \hat{b} \cdot x_t + \hat{c} \cdot z_t = \underset{(5{,}426)}{27{,}651} + \underset{(0{,}111)}{0{,}918} \cdot x_t + \underset{(5{,}948)}{0{,}995} \cdot z_t.$$

С помощью данного уравнения заполним в таблице столбцы $\hat{y}_t$, $e_t = y_t - \hat{y}_t$ и e_t^2.

2. Если $b = b_0$, то в нормальной классической линейной регрессионной модели случайная величина

$$t = \frac{\hat{b} - b_0}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}$$

подчиняется распределению Стьюдента с n-k-1=10-2-1=7 степенями свободы. Как и в парной регрессии, если $|t| < t_\alpha$, то принимается гипотеза $b = b_0$, в противном случае эта гипотеза отвергается.

Проверяем гипотезу **b**=0, т.е. b_0=0. Находим отношение

$$|t| = \left|\frac{\hat{b}}{\hat{\sigma}_{\hat{b}}}\right| = \frac{0{,}918}{0{,}111} = 8{,}270\,.$$

По таблице Приложения 1 находим $t_\alpha = 2{,}365$. Поскольку 8,270>2,365, то гипотеза **b**=0 отвергается, фактор **x** значимо влияет на результат.

Проверяем гипотезу **c**=0. Находим отношение

$$|t| = \left|\frac{\hat{c}}{\hat{\sigma}_{\hat{c}}}\right| = \frac{0{,}995}{5{,}948} = 0{,}167\,.$$

Поскольку 0,167<2,365, то гипотеза **c**=0 принимается, фактор **z** не влияет на результат. В нашем случае нет оснований считать, что рекламная компания повлияла на выручку. Следует учитывать, что десяти наблюдений для получения значимых результатов в множественной регрессии чаще всего оказывается недостаточно. Как правило, их требуется на порядок больше.

3. Коэффициент детерминации определяется по формуле

$$R^2 = \frac{RSS}{TSS},$$

где $RSS = \sum_{t=1}^{n} (\hat{y}_t - \bar{y})^2$ - сумма квадратов регрессии;

$TSS = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \bar{y})^2 = n(\overline{y^2} - \bar{y}^2) = 10 \cdot (6394{,}7 - 75{,}7^2) = 6642{,}10$ - общая сумма квадратов.

Для МНК оценок параметров линейной регрессии справедливо

$$TSS=RSS+ESS,$$

где $ESS = \sum_{t=1}^{n} (y_t - \hat{y}_t)^2 = \sum_{t=1}^{n} e_t^2 = 435{,}88$ - сумма квадратов ошибок.

Найдем RSS=TSS-ESS=6642,10-435,88=6206,22. Коэффициент детерминации равен

$$R^2 = \frac{6206{,}22}{6642{,}10} = 0{,}934.$$

Скорректированный коэффициент детерминации равен

$$\tilde{R}^2 = 1 - \frac{n-1}{n-3}(1 - R^2) = 1 - \frac{9}{7}(1 - 0{,}934) = 0{,}916\,.$$

Сравнивая значение скорректированного коэффициента детерминации с коэффициентом детерминации, полученным в задании 1, делаем вывод, что введение дополнительного регрессора **z** не улучшило качества регрессионной модели.

4. Дисперсионное отношение Фишера равно

$$F = \frac{n-k-1}{k} \cdot \frac{RSS}{ESS} = \frac{10-2-1}{2} \cdot \frac{6206{,}22}{435{,}88} = 49{,}834,$$

где k – число регрессоров в модели (в нашем случае **x** и **z** всего два регрессора). С помощью таблицы Приложения 2 находим $F_\alpha = 4{,}737$, число степеней свободы 2 и 7. Поскольку 49,834>4,737 модель является значимой.

5. Выборочный коэффициент корреляции между **x** и **y** равен

$$r_{xy} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{S_x S_y} = \frac{\overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2} - \overline{x}^2}\sqrt{\overline{y^2} - \overline{y}^2}} = \frac{4589{,}8 - 51{,}8 \cdot 75{,}7}{\sqrt{3403{,}6 - 51{,}8^2}\sqrt{6394{,}7 - 75{,}7^2}} = 0{,}966.$$

Аналогично определяются коэффициенты корреляции **x** и **z**, а также между **z** и **y**. Результаты расчетов представлены в табл.6.

Таблица 6

Коэффициенты корреляции			
r	**y**	**x**	**z**
y	1	0,966	0,539
x	0,966	1	0,544
z	0,539	0,544	1

В общем случае корреляционная матрица наблюдений имеет вид

$$r = \begin{pmatrix} 1 & r_{yx} & r_{yz} \\ r_{yx} & 1 & r_{xz} \\ r_{yz} & r_{xz} & 1 \end{pmatrix}.$$

Алгебраические дополнения ее элементов определяются стандартно. Например

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} r_{yx} & r_{xz} \\ r_{yz} & 1 \end{vmatrix} = -(r_{yx} - r_{xz} r_{yz}).$$

Частный коэффициент корреляции между **x** и **y** при фиксированном значении **z** равен

$$r_{yx.z} = -\frac{A_{12}}{\sqrt{A_{11}}\sqrt{A_{22}}} = \frac{r_{yx} - r_{xz} r_{yz}}{\sqrt{1 - r_{xz}^2}\sqrt{1 - r_{yz}^2}} = \frac{0{,}966 - 0{,}544 \cdot 0{,}539}{\sqrt{1 - 0{,}544^2}\sqrt{1 - 0{,}539^2}} = 0{,}953.$$

Частный коэффициент корреляции между **x** и **z** при фиксированном значении **y** равен

$$r_{xz.y} = -\frac{A_{23}}{\sqrt{A_{22}}\sqrt{A_{33}}} = \frac{r_{xz} - r_{yx}r_{yz}}{\sqrt{1-r_{yx}^2}\sqrt{1-r_{yz}^2}} = \frac{0{,}544 - 0{,}966 \cdot 0{,}539}{\sqrt{1-0{,}966^2}\sqrt{1-0{,}539^2}} = 0{,}105\,.$$

Частный коэффициент корреляции между **y** и **z** при фиксированном значении **x** равен

$$r_{yz.x} = -\frac{A_{13}}{\sqrt{A_{22}}\sqrt{A_{33}}} = \frac{r_{yz} - r_{xz}r_{yx}}{\sqrt{1-r_{xz}^2}\sqrt{1-r_{yx}^2}} = \frac{0{,}539 - 0{,}544 \cdot 0{,}966}{\sqrt{1-0{,}544^2}\sqrt{1-0{,}966^2}} = 0{,}063\,.$$

Результаты расчетов частных коэффициентов корреляции представлены в табл.7.

Таблица 7

Коэффициенты частной корреляции			
r	**y**	**x**	**z**
y	1	0,953	0,063
x	0,953	1	0,105
z	0,063	0,105	1

2.4. Системы регрессионных уравнений

Задана структурная система эконометрических уравнений:

$$\begin{cases} y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + a_{11}x_{t1} + a_{12}x_{t2} + \varepsilon_{t1} \\ y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2} \\ y_{t3} = b_{30} + b_{32}y_{t1} + \varepsilon_{t3}. \end{cases}$$

В табл.8 приведены данные наблюдений эндогенных y_{ti} и экзогенных x_{ti} переменных модели:

Таблица 8

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	19	23	13	5	5	4
2	15	31	15	7	8	3
3	22	13	17	4	8	2
4	6	32	9	6	2	5
5	8	66	16	12	2	9

Необходимо, опираясь на данные наблюдений, оценить параметры структурной системы.

Определим, являются ли уравнения системы идентифицируемыми. Для этого применим необходимое условие идентификации или счетное правило:

D+1=H – уравнение идентифицируемо;

D+1<H – уравнение неидентифицируемо;

D+1>H – уравнение сверхидентифицируемо.

Здесь H – число эндогенных переменных в уравнении; D – число отсутствующих экзогенных и лаговых переменных в уравнении. В приведенной системе лаговые или запаздывающие переменные отсутствуют.

В первом уравнении эндогенных переменных две: y_{t1}, y_{t2}, следовательно, H=2. Всего у нас три экзогенных переменных, из них в первом уравнении отсутствует одна x_{t3}. Поэтому D=1. Для первого уравнения выполняется D+1=H=2. Первое уравнение идентифицируемо. Аналогично определяем, что для второго уравнения выполняется D+1=H=3. Для третьего уравнения находим, что D+1=4>H=2. Третье уравнение сверхидентифицируемо.

Прямая оценка параметров структурной системы уравнений недопустима. Из-за корреляции регрессоров с остатками получаются смещенные оценки. Для оценки параметров используют косвенный МНК (в случае идентификации) или двухшаговый МНК (в случае идентификации и сверхидентификации). Оба метода требуют оценки параметров приведенной формы модели:

$$\begin{cases} \hat{y}_{t1} = \hat{c}_{10} + \hat{c}_{11}x_{t1} + \hat{c}_{12}x_{t2} + \hat{c}_{13}x_{t3} \\ \hat{y}_{t2} = \hat{c}_{20} + \hat{c}_{21}x_{t1} + \hat{c}_{22}x_{t2} + \hat{c}_{23}x_{t3} \\ \hat{y}_{t1} = \hat{c}_{30} + \hat{c}_{31}x_{t1} + \hat{c}_{32}x_{t2} + \hat{c}_{33}x_{t3}. \end{cases}$$

Опираясь на данные наблюдений, выполняем регрессию y_{t1} на x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}. Получаем уравнение прогноза

$$\hat{y}_{t1} = \underset{(2,726)}{-14,982} - \underset{(2,726)}{5,421}\, x_{t1} + \underset{(0,367)}{5,228}\, x_{t2} + \underset{(0,809)}{8,632}\, x_{t3} \qquad R^2 = 0,998$$

В скобках приводятся стандартные ошибки оценок параметров.

Затем выполняем регрессию y_{t2} на x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}

$$\hat{y}_{t2} = \underset{(2,726)}{1,129} + \underset{(0,469)}{5,912}\, x_{t1} - \underset{(0,367)}{1,327}\, x_{t2} - \underset{(0,809)}{0,368}\, x_{t3} \qquad R^2 = 0,9997$$

и y_{t3} на x_{t1}, x_{t2}, x_{t3}

$$\hat{y}_{t3} = \underset{(7,496)}{-7,298} - \underset{(1,291)}{1,342}\, x_{t1} + \underset{(1,008)}{2,623}\, x_{t2} + \underset{(2,223)}{3,763}\, x_{t3} \qquad R^2 = 0,920$$

Приведенная система эконометрических уравнений имеет вид

$$\begin{cases} \hat{y}_{t1} = -14,982 - 5,421x_{t1} + 5,228x_{t2} + 8,632x_{t3} \\ \hat{y}_{t2} = 1,129 + 5,912x_{t1} - 1,327x_{t2} - 0,368x_{t3} \\ \hat{y}_{t3} = -7,298 - 1,342x_{t1} + 2,623x_{t2} + 3,763x_{t3}. \end{cases}$$

Параметры первого уравнения структурной системы можно идентифицировать методом, который называется косвенный МНК. Для этого второе уравнение приведенной системы решается относительно x_{t3}:

$$x_{t3} = (\hat{y}_{t2} - 1{,}129 - 5{,}912 x_{t1} + 1{,}327 x_{t2})/(-0{,}368) = 3{,}068 - 2{,}717 \hat{y}_{t2} + 16{,}065 x_{t1} - 3{,}606 x_{t2}$$

Затем найденное значение подставляется в первое уравнение:

$$\hat{y}_{t1} = -14{,}982 - 5{,}421 x_{t1} + 5{,}228 x_{t2} + 8{,}632 \cdot (3{,}068 - 2{,}717 \hat{y}_{t2} + 16{,}065 x_{t1} - 3{,}606 x_{t2})$$
$$= 11{,}501 - 23{,}453 \hat{y}_{t2} + 133{,}252 x_{t1} - 25{,}899 x_{t2}.$$

Для идентификации второго уравнения структурной системы решаем первое и третье уравнения приведенной системы относительно x_{t1} и x_{t2} и подставляем найденные значения во второе уравнение:

$$\begin{cases} -5{,}421 x_{t1} + 5{,}228 x_{t2} = \hat{y}_{t1} + 14{,}982 - 8{,}632 x_{t3} \\ -1{,}342 x_{t1} + 2{,}623 x_{t2} = \hat{y}_{t3} + 7{,}298 - 3{,}763 x_{t3} \end{cases}$$

$$x_{t1} = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} \hat{y}_{t1} + 14{,}982 - 8{,}632 x_{t3} & 5{,}228 \\ \hat{y}_{t3} + 7{,}298 - 3{,}763 x_{t3} & 2{,}623 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5{,}421 & 5{,}228 \\ -1{,}342 & 2{,}623 \end{vmatrix}} = -0{,}159 - 0{,}364 \hat{y}_{t1} + 0{,}726 \hat{y}_{t3} + 0{,}412 x_{t3}$$

$$x_{t2} = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} -5{,}421 & \hat{y}_{t1} + 14{,}982 - 8{,}632 x_{t3} \\ -1{,}342 & \hat{y}_{t3} + 7{,}298 - 3{,}763 x_{t3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -5{,}421 & 5{,}228 \\ -1{,}342 & 2{,}623 \end{vmatrix}} = 2{,}701 - 0{,}186 \hat{y}_{t1} + 0{,}753 \hat{y}_{t3} - 1{,}224 x_{t3}.$$

$$\hat{y}_{t2} = 1{,}129 + 5{,}912 \cdot (-0{,}159 - 0{,}364 \hat{y}_{t1} + 0{,}726 \hat{y}_{t3} + 0{,}412 x_{t3}) -$$
$$-1{,}327 \cdot (2{,}701 - 0{,}186 \hat{y}_{t1} + 0{,}753 \hat{y}_{t3} - 1{,}224 x_{t3}) - 0{,}368 x_{t3} =$$
$$= -3{,}395 - 1{,}905 \hat{y}_{t1} + 3{,}293 \hat{y}_{t3} + 3{,}692 x_{t3}.$$

Третье уравнение структурной системы сверхидентифицируемо. Для идентификации его параметров необходимо применить двухшаговый МНК. На первом шаге определяем значения инструментальной переменной

$$\hat{y}_{t1} = -14{,}982 - 5{,}421 x_{t1} + 5{,}228 x_{t2} + 8{,}632 x_{t3}.$$

Значения $\hat{y}_{t1}$ рассчитываются в табл.9.

Таблица 9

t	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}	$\hat{y}_{t1}$
1	13	5	5	4	18,579
2	15	7	8	3	14,789
3	17	4	8	2	22,421
4	9	6	2	5	6,105
5	16	12	2	9	8,105

На втором шаге осуществляем регрессию y_{t3} на $\hat{y}_{t1}$. Получаем уравнение

$$\hat{y}_{t3} = \underset{(3{,}348)}{10{,}370} + \underset{(0{,}219)}{0{,}259}\, \hat{y}_{t1} \qquad R^2 = 0{,}319$$

Идентификация параметров произведена. Структурная система эконометрических уравнений имеет вид:

$$\begin{cases} \hat{y}_{t1} = 11{,}501 - 23{,}453\hat{y}_{t2} + 133{,}252x_{t1} - 25{,}899x_{t2} \\ \hat{y}_{t2} = -3{,}395 - 1{,}905\hat{y}_{t1} + 3{,}293\hat{y}_{t3} + 3{,}692x_{t3} \\ \hat{y}_{t3} = 10{,}370 + 0{,}259\hat{y}_{t1} + \varepsilon_{t3}. \end{cases}$$

2.5. Временные ряды. Авторегрессия

В табл.10 приводятся наблюдения продаж некоторого товара. Переменная **t** – номер наблюдения. Переменная $\mathbf{y_t}$ – выручка за один день.

Таблица 10

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
$\mathbf{y_t}$	19	15	20	21	21	19	16	20	20	22	19	16	22	22	23
t	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
$\mathbf{y_t}$	21	19	23	21	23	22	19	21	21	23	21	19	22	21	24

1. Данные таблицы представляют временной ряд. Оценим характер временного ряда визуально. Для этого построим его диаграмму, представленную на рис.3.

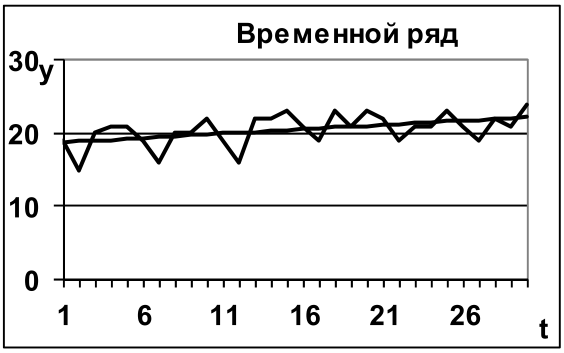

Рис.3. Временной ряд и тренд (прямая линия) продаж товара

По графику временного ряда можно увидеть, что значения временного ряда возрастают с увеличением номера наблюдения. Это означает, что у временного ряда может быть тренд. Определим параметры тренда. Для этого построим линейную регрессионную модель с регрессором **t**:

$$y_t = a + b \cdot t + \varepsilon_t.$$

Определим оценки параметров: $\hat{a} = 18{,}641$ $(t = 25{,}932)$; $\hat{b} = 0{,}120$ $(t = 2{,}961)$ (в скобках представлено отношение Стьюдента, критическое значение t_a=2,048, число степеней свободы 30-2=28). Поскольку 2,961>2,048, то оценка параметра **b** является значимой и тренд у временного ряда существует.

Вычислим прогнозные значения

$$\hat{y}_t = \hat{a} + \hat{b} \cdot t = 18{,}641 + 0{,}120 \cdot t$$

и отклонения от прогноза

$$e_t = y_t - \hat{y}_t .$$

Результаты расчетов представлены в табл.11. Линия тренда - на рис.3.

Таблица 11

t		y_t	e_t	t-5	y_{t-5}	t^*	y^*_t	$\hat{y}_t$	$\hat{y}_t^{пр}$	$e_t^{пр}$
Наблюдения	1	19	0,239					19,676		
	2	15	-3,881					19,749		
	3	20	0,999					19,822		
	4	21	1,879					19,895		
	5	21	1,759					19,968		
	6	19	-0,361	1	19	5,323	6,137	20,041	19,583	-0,583
	7	16	-3,481	2	15	5,646	5,845	20,114	16,899	-0,899
	8	20	0,399	3	20	5,969	6,46	20,187	20,307	-0,307
	9	20	0,279	4	21	6,292	5,783	20,260	21,008	-1,008
	10	22	2,160	5	21	6,615	7,783	20,333	21,032	0,968
	11	19	-0,960	6	19	6,938	6,137	20,406	19,701	-0,701
	12	16	-4,080	7	16	7,261	5,168	20,479	17,694	-1,694
	13	22	1,800	8	20	7,584	8,46	20,552	20,425	1,575
	14	22	1,680	9	20	7,907	8,46	20,625	20,449	1,551
	15	23	2,560	10	22	8,23	8,106	20,698	21,827	1,173
	16	21	0,440	11	19	8,553	8,137	20,771	19,819	1,181
	17	19	-1,680	12	16	8,876	8,168	20,844	17,812	1,188
	18	23	2,200	13	22	9,199	8,106	20,917	21,897	1,103
	19	21	0,080	14	22	9,522	6,106	20,990	21,921	-0,921
	20	23	1,960	15	23	9,845	7,429	21,063	22,622	0,378
	21	22	0,840	16	21	10,168	7,783	21,136	21,291	0,709
	22	19	-2,279	17	19	10,491	6,137	21,209	19,961	-0,961
	23	21	-0,399	18	23	10,814	5,429	21,282	22,692	-1,692
	24	21	-0,519	19	21	11,137	6,783	21,355	21,362	-0,362
	25	23	1,361	20	23	11,46	7,429	21,428	22,739	0,261
	26	21	-0,759	21	22	11,783	6,106	21,501	22,086	-1,086
	27	19	-2,879	22	19	12,106	6,137	21,574	20,079	-1,079
	28	22	0,001	23	21	12,429	7,783	21,647	21,456	0,544
	29	21	-1,119	24	21	12,752	6,783	21,720	21,480	-0,480
	30	24	1,761	25	23	13,075	8,429	21,793	22,857	1,143
Σ	**465**	**615**	**0,0**	**325,0**	**508,0**	**230,0**	**175,084**	**622,0**	**519,0**	**0,0**
Σ/n	**15,5**	**20,5**	**0,0**	**10,833**	**16,933**	**7,666**	**5,836**	**20,734**	**17,300**	**0,0**
Прогноз	31							21,866	22,105	
	32							21,939	21,452	
	33							22,012	23,506	
	34							22,085	17,324	
	35							22,158	22,000	

Сумма квадратов отклонений остатков построенной модели ESS=103,2, общая сумма квадратов TSS=135,5. Коэффициент детерминации R^2=0,239, отношение Фишера F=8,771 (критическое значение F_a=4,196). Модель тренда является значимой по критерию Фишера.

2. Исследуем возможности увеличения значимости данной модели. Для этого определим выборочную автокорреляционную функцию остатков построенной модели. Ее значения рассчитываются по формуле

$$r_i \approx \frac{\sum_{t=i+1}^{n} e_t e_{t-i}}{\sum_{t=1}^{n} e_t^2}$$

и представлены в табл.12. Гистограмма автокорреляционной функции показана на рис.4.

Таблица 12

Автокорреляционная функция							
i	0	1	2	3	4	5	6
r_i	1	-0,015	-0,273	-0,336	-0,04	0,677	-0,094

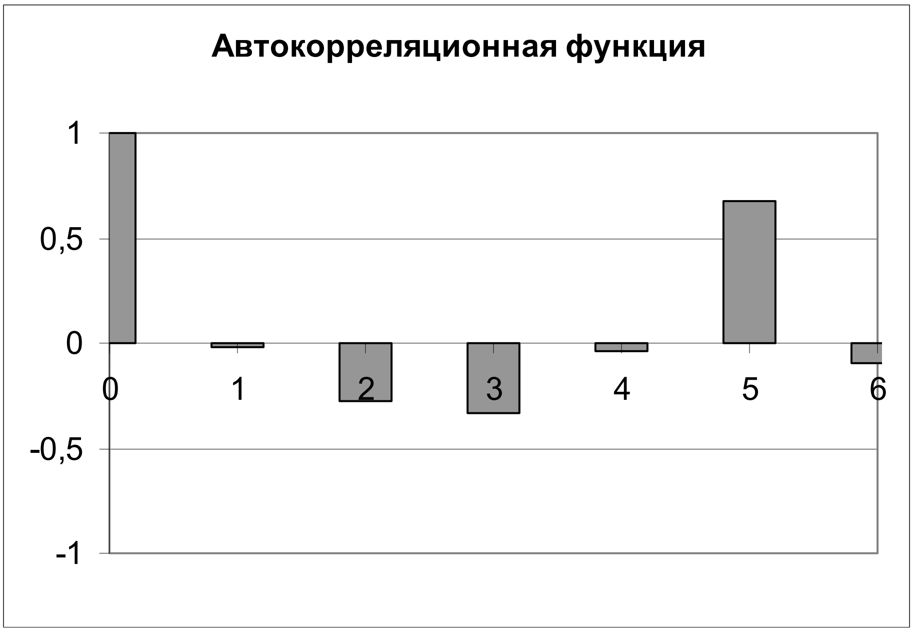

Рис.4. Гистограмма автокорреляционной функции

При i=5 автокорреляция (0,677) значительно превосходит по модулю соседние значения и указывает на корреляцию остатков через 5 наблюдений. Для продаж, которые осуществляются по рабочим дням (5 дней в неделю), характерна так называемая недельная сезонная компонента. Если фиксируются поквартальные данные, то может наблюдаться корреляция остатков при i=4 (квартальная сезонная компонента). Если рассматриваются месячные данные, то может наблюдаться значимая корреляция при i=12 и т.д.

В связи с тем, что отклонения продаж товара от тренда коррелируют через 5 дней, предлагается следующая модель временного ряда:

$$y_t = a + b \cdot t + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \rho \cdot \varepsilon_{t-5} + u_t,$$

где u_t – случайные отклонения, удовлетворяющие требованиям классической ЛРМ.

Вычислим

$$y_t^* = y_t - \rho y_{t-5} = a + bt + \varepsilon_t - \rho(a + b(t-5) + \varepsilon_{t-5}) =$$

$$= a(1-\rho) + b(t - \rho(t-5)) + \varepsilon_t - \rho\varepsilon_{t-5} = a^* + bt^* + u_t$$

Получена классическая ЛРМ, параметры которой могут оцениваться с помощью МНК при этом оценки являются состоятельными, несмещенными и эффективными. Оценка параметра $\hat{\rho} = r_5 = 0{,}677$. Вычислим $y_t^* = y_t - \hat{\rho} y_{t-5}$ и $t^* = t - \hat{\rho}(t-5)$ и включим найденные значения в таблицу. МНК оценки параметров $\hat{a}^* = 6{,}332$; $\hat{a} = \frac{\hat{a}^*}{1-\hat{\rho}} = \frac{6{,}332}{1-0{,}677} = 19{,}603$; $\hat{b} = 0{,}073$. Получена ЛРМ с учетом сезонных колебаний

$$\hat{y}_t = \hat{a} + \hat{b}t = 19{,}603 + 0{,}073 \cdot t\,.$$

Прогнозирование в этой модели осуществляется с учетом последних наблюдений временного ряда:

$$\hat{y}_t^{пр} = \hat{y}_t^* + \hat{\rho} y_{t-5} = \hat{y}_t + \hat{\rho}(y_{t-5} - \hat{y}_{t-5})\,.$$

Сумма квадратов остатков построенной модели ESS=26,5, общая сумма квадратов TSS=135,5. Коэффициент детерминации R^2=0,804, отношение Фишера F=94,6 (критическое значение F_a=4,279, число степеней свободы 30-2-5=23). Значимость модели заметно улучшилась. Прогноз продаж товара на следующую рабочую неделю представлен в таблице и на рис.5.

Рис.5. Временной ряд, линейный тренд и прогноз с учетом корреляции остатков

3. КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Задание 1.
Линейная регрессионная модель

В табл.13 даны наблюдения $\mathbf{x_t}$ и $\mathbf{y_t}$. Предполагается, что зависимую переменную **y** и независимую **x** связывает линейное регрессионное уравнение $\mathbf{y_t=a+b\cdot x_t+\varepsilon_t}$, где **a** и **b** неизвестные параметры уравнения, $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ – случайные отклонения. Для всех вариантов необходимо выполнить следующие задания.

1. Постройте диаграмму рассеяния наблюдений и визуально проверьте гипотезу о возможной линейной зависимости между **x** и **y**.
2. По методу наименьших квадратов (МНК) определите оценки параметров **a** и **b** линейной регрессионной модели.
3. На диаграмме рассеяния постройте график прогнозных значений , где $\hat{a}$ – оценка параметра **a**, а $\hat{b}$ – оценка параметра **b**.
4. Вычислите оценку дисперсии остатков. Оцените дисперсию $\hat{a}$ и $\hat{b}$.
5. С уровнем значимости 0,05 проверьте гипотезу **a**=100 и гипотезу **b**=0.
6. Постройте 95% доверительные интервалы для параметров **a** и **b**.
7. Определите коэффициент детерминации $\mathbf{R^2}$, качественно оцените тесноту связи между **x** и **y**.
8. Вычислите дисперсионное отношение **F**. С уровнем значимости 0,05 проверьте гипотезу о наличии связи между **x** и **y**.
9. Определите прогнозное значение $\hat{y}_{11}$ при $\mathbf{x_{11}=N}$, где **N** – номер Вашего варианта. Постройте 95% доверительный интервал для найденного прогнозного значения.
10. Оцените с помощью эластичности силу влияния фактора на результат в точке $\mathbf{x_{11}}$.

Таблица 13

t	**Вариант 1**		**Вариант 2**		**Вариант 3**		**Вариант 4**		**Вариант 5**	
	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t
1	9	31	15	60	13	25	14	110	19	26
2	11	31	17	84	9	22	18	136	11	33
3	15	35	7	19	15	25	16	125	6	42
4	6	28	17	75	15	25	8	84	9	36
5	17	33	15	59	18	27	19	140	15	28
6	13	31	16	65	6	18	6	77	17	28
7	14	34	14	50	11	24	16	120	18	28
8	16	34	13	55	14	25	13	100	11	34
9	7	28	6	32	18	27	8	84	19	25
10	11	31	15	53	8	21	6	75	11	33

t	Вариант 6		Вариант 7		Вариант 8		Вариант 9		Вариант 10	
	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t
1	9	131	7	16	9	25	12	97	10	33
2	7	130	11	26	18	31	6	74	19	25
3	16	144	14	38	20	31	14	107	14	31
4	11	140	9	25	17	29	13	108	17	28
5	17	157	7	21	6	17	18	128	19	27
6	8	123	15	40	7	23	14	113	14	29
7	19	155	10	24	7	21	20	141	6	43
8	18	159	12	32	8	21	14	109	16	28
9	12	145	6	18	20	30	10	88	9	39
10	14	153	7	19	18	30	14	112	10	36

t	Вариант 11		Вариант 12		Вариант 13		Вариант 14		Вариант 15	
	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t
1	16	32	13	52	9	22	5	72	19	26
2	19	34	15	66	8	20	18	136	19	25
3	12	31	15	62	20	27	10	88	13	30
4	16	32	14	61	9	22	7	75	19	27
5	14	34	6	26	15	26	15	114	7	41
6	6	29	19	89	15	26	10	97	17	26
7	13	32	11	41	14	26	5	73	9	37
8	10	32	14	54	19	26	8	84	18	27
9	12	34	7	25	18	27	19	143	8	38
10	20	35	16	70	19	27	7	79	9	37
10	20	35	16	70	19	27	7	79	9	37

t	Вариант 16		Вариант 17		Вариант 18		Вариант 19		Вариант 20	
	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t	x_t	y_t
1	17	158	7	23	9	24	8	84	19	27
2	15	138	6	18	11	28	19	140	16	27
3	8	129	14	36	17	32	6	77	19	26
4	5	114	7	21	19	27	16	120	14	29
5	16	155	16	39	14	32	13	100	17	29
6	14	151	19	52	9	27	8	84	14	32
7	20	163	14	37	19	33	6	75	12	31
8	16	145	9	20	16	31	12	97	6	45
9	12	144	16	41	12	27	6	74	14	30
10	12	148	6	17	6	21	14	107	19	26

Задание 2.
Нелинейная модель. Линеаризация

Для тех же наблюдений $\mathbf{x_t}$ и $\mathbf{y_t}$, предполагается, что зависимую переменную **y** и независимую **x** связывает нелинейное регрессионное уравнение:

$y_t = a + b \cdot \frac{1}{x_t} + \varepsilon_t$ для вариантов 1,6,11,16;

$y_t = a \cdot b^{x_t} \cdot \varepsilon_t$ для вариантов 2,7,12,17;

$\ln y_t = a + b \cdot \frac{1}{x_t} + \varepsilon_t$ для вариантов 3,8,13,18;

$y_t = a \cdot e^{b \cdot x_t} \cdot \varepsilon_t$ для вариантов 4,9,14,19;

$y_t = a \cdot x_t{}^b \cdot \varepsilon_t$ для вариантов 5,10,15,20.

Для всех вариантов необходимо выполнить следующие задания.

1. Проведите линеаризацию модели, определите оценки параметров нелинейной модели.
2. Оцените качество модели с помощью коэффициента детерминации и дисперсионного отношения **F**.
3. Определите прогнозное значение $\hat{y}_{11}$ при $\mathbf{x_{11}=N}$, где **N** – номер Вашего варианта. Постройте 95% доверительный интервал для прогноза.
4. Оцените с помощью эластичности силу влияния фактора на результат в точке $\mathbf{x_{11}}$.
5. На диаграмме рассеяния постройте график прогнозных значений. Определите сумму квадратов отклонений наблюдений от нелинейного прогноза.

Задание 3.
Множественная регрессия

К тем же наблюдениям $\mathbf{x_t}$**,** и $\mathbf{y_t}$. добавляются значения $\mathbf{z_t} = \sqrt{x_t}$. Предполагается, что зависимую переменную **y** и факторы связывает уравнение множественной линейной регрессии

$\mathbf{y_t=a+b \cdot x_t+c \cdot z_t+\varepsilon_t}$,

где **a**, **b** и **c** - неизвестные параметры уравнения, $\boldsymbol{\varepsilon_t}$ – случайные отклонения.

1. Определите МНК оценки параметров уравнения.
2. С уровнем значимости 0,05 проверьте гипотезу **b**=0 (о влиянии фактора **x** на результат) и **c**=0 (о влиянии фактора **z** на результат).
3. Определите коэффициент детерминации и скорректированный коэффициент детерминации.

4. По критерию Фишера F с уровнем значимости 0,05 оцените качество модели в целом.

5. Составьте корреляционную таблицу наблюдений и вычислите частные коэффициенты корреляции.

6. Сравните по качеству модели заданий 1, 2 и 3.

Задание 4.
Системы регрессионных уравнений

В каждом из заданий (табл.14) предлагается структурная система эконометрических уравнений, приведенная система уравнений и данные наблюдений.

1. Определите к какому типу относится каждое из уравнений структурной системы эконометрических уравнений (идентифицируемо, неиндентифицируемо или сверхидентифицируемо).

2. Опираясь на данные наблюдений и построенную на их основе приведенную систему эконометрических уравнений, проведите идентификацию параметров структурной системы.

Таблица 14

Вариант 1.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 2 - x_{t1} + 3x_{t2} - x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = -1 + 2x_{t1} - 2x_{t2} + x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = 5 + 2x_{t1} - 4x_{t2} + 3x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	14	-8	-5	1	5	3
2	6	0	3	2	3	2
3	20	-7	-8	4	8	3
4	-5	14	23	6	2	5
5	6	2	14	2	4	7

Вариант 2.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + b_{13}y_{t3} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 5 + 3x_{t1} + 2x_{t2} + 5x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = 1 + 4x_{t1} - 2x_{t2} - 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = -1 - 3x_{t1} + x_{t2} + x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	26	-5	-1	1	1	3
2	19	4	-4	2	2	1
3	47	-4	-1	4	7	3
4	32	19	-16	6	3	1
5	48	-5	-1	3	4	5

Вариант 3.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + a_{12}x_{t2} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{21}x_{t1} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{32}y_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Вариант 4.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + a_{21}x_{t1} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + b_{32}y_{t2} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 2 - 3x_{t1} + x_{t2} + 4x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} - 4 + 2x_{t1} - x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = -3 - 2x_{t1} + 2x_{t2} + 5x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	-6	3	-1	1	5	3
2	15	0	20	2	3	2
3	7	-1	17	4	8	3
4	4	18	13	6	2	5
5	29	20	38	2	4	7

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = -3 + 4x_{t1} + x_{t2} - 5x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = 1 - 2x_{t1} - 2x_{t2} + 3x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = 5 - 1x_{t1} - x_{t2} - x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
	1	-12	-9	1	1	3
2	-1	-6	-4	2	2	1
3	3	-13	-7	4	7	3
4	-5	4	-8	6	3	1
5	-26	12	-7	3	4	5

Вариант 5.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 1 + x_{t1} + 2x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = -1 + 3x_{t1} + x_{t2} + 3x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = 2 + 3x_{t1} + 2x_{t2} + 3x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	26	35	44	1	5	3
2	3	17	1		3	2
3	14	16	25	4	8	3
4	13	23	24	6	2	5
5	20	17	26	2	4	7

Вариант 6.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + b_{13}y_{t3} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 1 + 3x_{t1} + x_{t2} - 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = -2 + 2x_{t1} + 3x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = 1 + 3x_{t1} + 4x_{t2} + 5x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	13	25	47	1	1	3
2	15	18	33	2	2	1
3	16	3	62	4	7	
	11	27	50	6	3	1
5	10	16	28	3	4	5

Вариант 7.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + a_{12}x_{t2} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{21}x_{t1} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{32}y_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 1 + 2x_{t1} + 2x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = 2 - 1x_{t1} - 2x_{t2} + x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = -1 - 4x_{t1} + 4x_{t2} + 3x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	26	-11	11	1	5	3
2	30	-3	-18	2	3	2
3	14	-4	15	4	8	3
4	29	-9	37	6		5
5	16	-	9	2	4	7

Вариант 8.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + a_{21}x_{t1} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + b_{32}y_{t2} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 1 + 1x_{t1} + 4x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = -2 - 1x_{t1} + 1x_{t2} - 3x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = 2 + 2x_{t1} + x_{t2} + 2x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	30	-10	16	1	1	3
2	24	-12	25	2	2	1
3	44	-15	29	4	7	3
4	23	-19	25	6	3	1
5	16	-15	15	3	4	5

Вариант 9.

Структурная система:

$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$

$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$

Приведенная система:

$\hat{y}_{t1} = 2 + 2x_{t1} + x_{t2} + 2x_{t3}$

$\hat{y}_{t2} = 3 - 3x_{t1} - 2x_{t2} + x_{t3}$

$\hat{y}_{t3} = 1 + x_{t1} + x_{t2} + 3x_{t3}$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	16	-9	15	1	5	3
2	12	-6	12	2	3	2
3	25	-23	24	4	8	3
4	24	-12	23	6	2	5
5	25	-4	28	2	4	7

Вариант 10.

Структурная система:

$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + b_{13}y_{t3} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$

$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$

Приведенная система:

$\hat{y}_{t1} = 2 + x_{t1} + 2x_{t2} + 2x_{t3}$

$\hat{y}_{t2} = 6 - 4x_{t1} - 5x_{t2} + 2x_{t3}$

$\hat{y}_{t3} = -2 + 3x_{t1} + 4x_{t2} + x_{t3}$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	12	1	7	1	1	3
2	9	-9	13	2	2	1
3	27	-40	43	4	7	3
4	14	-29	28	6	3	1
5	24	-16	28	3	4	5

Вариант 11.

Структурная система:

$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + a_{12}x_{t2} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$

$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{21}x_{t1} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t3} = b_{30} + b_{32}y_{t2} + \varepsilon_{t3}.$

Приведенная система:

$\hat{y}_{t1} = 6 - 3x_{t1} + x_{t2} + 4x_{t3}$

$\hat{y}_{t2} = 2 + x_{t1} - x_{t2} + 2x_{t3}$

$\hat{y}_{t3} = -3 - 2x_{t1} + 2x_{t2} + 3x_{t3}$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	-2	3	-3	1	5	3
2	19	5	14	2	3	2
3	11	1	13	4	8	3
4	8	18	3	6	2	5
5	33	22	20	2	4	7

Вариант 12.

Структурная система:

$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$

$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + a_{21}x_{t1} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + b_{32}y_{t2} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$

Приведенная система:

$\hat{y}_{t1} = 2 + 4x_{t1} + x_{t2} - 3x_{t3}$

$\hat{y}_{t2} = -3 + 2x_{t1} - 2x_{t2} - 2x_{t3}$

$\hat{y}_{t3} = 5 - 1x_{t1} + 4x_{t2} - x_{t3}$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	22	-7	11	1	1	3
2	8	-12	21	2	2	1
3	14	-20	33	4	7	3
4	10	-1	-3	6	3	1
5	-7	-19	8	3	4	5

Вариант 13.

Структурная система:

$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$

$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$

Приведенная система:

$\hat{y}_{t1} = 2 + x_{t1} + 3x_{t2} - 4x_{t3}$

$\hat{y}_{t2} = -4 + 5x_{t1} - 3x_{t2} + 3x_{t3}$

$\hat{y}_{t3} = 3 + x_{t1} + 4x_{t2} + 3x_{t3}$

Вариант 14.

Структурная система:

$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + b_{13}y_{t3} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$

$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + \varepsilon_{t2}$

$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$

Приведенная система:

$\hat{y}_{t1} = 1 + 3x_{t1} + 5x_{t2} - 5x_{t3}$

$\hat{y}_{t2} = 2 + 3x_{t1} + 2x_{t2} + 2x_{t3}$

$\hat{y}_{t3} = 1 - 5x_{t1} - 4x_{t2} + 5x_{t3}$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	14	28	39	1	5	3
2	-8	8	24	2	3	2
3	12	9	24	4	8	3
4	-15	20	23	6	2	5
5	15	-6	35	2	4	7

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	24	8	-25	1	1	3
2	13	27	-23	2	2	1
3	39	35	-34	4	7	3
4	0	37	-14	6	3	1
5	23	18	-20	3	4	5

Вариант 15.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + a_{12}x_{t2} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{21}x_{t1} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{32}y_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 1 + 2x_{t1} - 3x_{t2} - 4x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = 1 - 2x_{t1} - 2x_{t2} + x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = -2 - 4x_{t1} + 2x_{t2} + 3x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	-17	-16	0	1	5	3
2	-5	-13	21	2	3	2
3	-13	-6	8	4	8	3
4	-41	-12	20	6	2	5
5	-11	-7	2	2	4	7

Вариант 16.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + a_{21}x_{t1} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + b_{32}y_{t2} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 3 + x_{t1} + 3x_{t2} + x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = -3 - x_{t1} - x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = 1 - x_{t1} + 4x_{t2} + 2x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	24	-6	24	1	1	3
2	21	-9	9	2	2	1
3	34	-5	37	4	7	3
4	8	1	12	6	3	1
5	13	2	11	3	4	5

Вариант 17.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = -1 + 2x_{t1} + 4x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = 3 - 3x_{t1} - 2x_{t2} + 4x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = -2 + x_{t1} + 3x_{t2} + 3x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	28	0	22	1	5	3
2	18	0	15	2	3	2
3	46	-14	37	4	8	3
4	27	3	24	6	2	5
5	4	17	33		4	

Вариант 18.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + b_{13}y_{t3} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + a_{31}x_{t1} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:

$$\hat{y}_{t1} = 1 + x_{t1} + 2x_{t2} + 4x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t2} = 5 + 4x_{t1} + 6x_{t2} + 2x_{t3}$$
$$\hat{y}_{t3} = -4 - 3x_{t1} - 5x_{t2} + x_{t3}$$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	17	19	-10	1	1	3
2	10	28	-19	2	2	1
3	32	68	-46	4	7	3
4	15	51	-37	6	3	1
5	33	51	-28	3	4	5

Вариант 19.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + a_{12}x_{t2} + a_{13}x_{t3} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + b_{23}y_{t3} + a_{21}x_{t1} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{32}y_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Вариант 20.

Структурная система:

$$y_{t1} = b_{10} + b_{12}y_{t2} + \varepsilon_{t1}$$
$$y_{t2} = b_{20} + b_{21}y_{t1} + a_{21}x_{t1} + a_{23}x_{t3} + \varepsilon_{t2}$$
$$y_{t3} = b_{30} + b_{31}y_{t1} + b_{32}y_{t2} + a_{32}x_{t2} + \varepsilon_{t3}.$$

Приведенная система:	Приведенная система:
$\hat{y}_{t1} = 1 - 3x_{t1} + 3x_{t2} + x_{t3}$ $\hat{y}_{t2} = -3 - 2x_{t1} - x_{t2} + 2x_{t3}$ $\hat{y}_{t3} = 1 - 2x_{t1} + 2x_{t2} + x_{t3}$	$\hat{y}_{t1} = 3 + 4x_{t1} - 2x_{t2} - 5x_{t3}$ $\hat{y}_{t2} = -2 - 2x_{t1} + 3x_{t2} + 3x_{t3}$ $\hat{y}_{t3} = 5 - x_{t1} + 4x_{t2} - x_{t3}$

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	0	-20	-1	1	5	3
2	15	-3	12	2	3	2
3	16	-16	13	4	8	3
4	-8	-5	-3	6	2	5
5	5	5	6	2	4	7

Данные наблюдений:

t	y_{t1}	y_{t2}	y_{t3}	x_{t1}	x_{t2}	x_{t3}
1	5	5	11	1	1	3
2	-10	16	21	2	2	1
3	-15	24	33	4	7	3
4	-2	6	-3	6	3	1
5	-29	24	8	3	4	5

Задание 5.
Временные ряды. Авторегрессия

1. Постройте диаграмму наблюдений временного ряда. Определите для него линейный тренд. Вычислите отклонения наблюдений от тренда (остатки регрессии). Установите, является ли данный тренд значимым.
2. Определите и постройте выборочную автокорреляционную функцию остатков (r_i для i=1,2,..,5). Установите пиковое значение автокорреляционной функции. Постройте соответствующую найденному пиковому значению модель временного ряда с корреляцией остатков. Оцените качество построенной модели.
3. С помощью построенной модели сделайте прогноз для следующих за тридцатым пяти наблюдений временного ряда.

В табл.15 представлены наблюдения временного ряда.

Таблица 15

t	Варианты 1 – 20																			
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	9	0
	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	y_t	t	t
1	50	52	49	49	52	49	52	50	54	52	100	100	98	100	103	90	98	101	00	8
2	50	50	49	51	55	47	51	51	55	46	100	99	101	101	101	89	98	99	01	01
3	52	52	49	48	47	48	52	52	55	44	101	100	103	103	106	90	99	97	9	02
4	51	48	51	50	48	49	51	51	52	51	104	102	98	99	104	92	98	100	7	9
5	51	51	49	50	55	49	51	50	53	48	104	100	102	101	101	90	100	96	7	01
6	51	49	50	52	53	50	52	49	52	50	103	102	102	102	104	89	99	95	8	5
7	52	52	51	50	56	49	51	51	53	44	103	101	99	104	103	88	100	97	8	00
8	51	51	52	53	50	49	51	49	49	41	103	103	101	102	109	89	98	96	5	01
9	52	52	51	51	50	49	49	49	52	47	103	101	101	103	107	89	100	94	6	8
10	51	52	50	55	58	50	50	49	52	46	103	104	100	104	102	88	98	96	6	6

11	51	53	51	51	56	49	46	46	51	47	104	101	102	106	107	88	100	97	7	3
12	52	54	52	53	59	51	48	49	48	42	103	104	102	105	106	86	98	92	5	9
13	52	53	51	53	53	50	48	49	52	40	102	103	102	104	111	88	99	94	5	7
14	54	54	53	58	54	49	49	46	50	45	102	104	103	106	110	88	96	96	4	6
15	52	53	52	54	60	48	48	48	52	43	101	105	103	108	105	89	98	92	5	4
16	53	54	51	56	58	50	48	48	47	45	102	103	104	107	108	88	97	95	3	1
17	53	54	54	55	62	48	48	46	50	41	102	106	105	107	106	87	96	94	4	6
18	51	54	54	59	56	47	46	46	47	38	104	104	104	108	113	86	96	92	3	5
19	51	55	52	56	57	48	46	47	49	41	104	104	105	110	111	87	96	95	3	4
20	50	55	55	57	62	48	45	46	45	43	103	103	105	108	108	87	95	93	2	2
21	50	55	54	58	60	48	46	45	47	40	103	103	105	108	112	87	97	92	3	9
22	51	56	53	60	65	49	45	47	46	37	102	102	106	110	110	86	94	93	1	0
23	54	55	55	57	59	47	46	45	46	36	102	104	108	111	114	87	96	93	1	1

24	54	57	57	59	60	48	46	45	44	38	103	106	107	111	113	88	94	92	9	3
25	53	55	57	61	64	47	47	46	45	38	104	105	107	110	111	88	95	94	1	0
26	53	56	55	62	62	47	46	45	44	36	104	106	108	111	115	87	93	94	0	7
27	53	56	57	59	67	45	46	45	44	33	107	105	108	112	113	85	93	91	8	7
28	53	55	57	59	63	46	46	44	41	34	105	106	108	111	115	87	94	93	7	9
29	53	55	56	63	62	45	46	43	42	34	106	106	107	111	116	88	93	91	9	0
30	54	55	59	62	68	46	45	44	42	35	104	106	108	112	114	87	95	90	0	7

4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Парная линейная регрессия

1. Что называется линейной регрессионной моделью (ЛРМ)? Какие практические задачи могут решаться с помощью парной регрессии?
2. Как оценить параметры ЛРМ методом наименьших квадратов (МНК)?
3. Каким требованиям должна удовлетворять классическая ЛРМ? Сформулируйте условия Гаусса-Маркова.
4. Докажите несмещенность и состоятельность оценок параметров в классической ЛРМ.
5. Какая оценка параметра называется эффективной. Сформулируйте теорему Гаусса-Маркова для парной регрессии.
6. Какие статистические свойства у оценок параметров в нормальной классической ЛРМ?
7. Как проверяются гипотезы для значений параметров и строятся доверительные интервалы в нормальной классической ЛРМ?
8. Как вычисляется коэффициент детерминации и дисперсионное отношение Фишера? Как проверяется гипотеза о значимости модели?
9. Установите связь между F-отношением Фишера и коэффициентом детерминации R^2.

2. Нелинейная модель. Линеаризация

1. Представьте основные нелинейные модели. Опишите процесс линеаризации.
2. Как осуществляется прогнозирование в ЛРМ? Как строятся доверительные интервалы для прогноза?
3. Как определяется эластичность в линейной и нелинейных моделях?

3. Множественная линейная регрессия

1. Определите множественную ЛРМ. Какие практические задачи могут решаться с помощью множественной регрессии?
2. Как производится оценка параметров множественной ЛРМ? Как выглядит система нормальных уравнений? Опишите способ ее решения.
3. Какая множественная ЛРМ называется классической? Перечислите условия Гаусса-Маркова для множественной регрессии.

4. Как оценивается качество множественной регрессии с помощью коэффициента детерминации и отношения Фишера? Как проверить гипотезу о значении параметра модели?

5. Опишите процедуру вычисления скорректированного коэффициента детерминации. Для каких целей он используется?

6. Когда наблюдается полная, а когда частичная мультиколлинеарность? Опишите признаки частичной мультиколлинеарности и методы ее устранения.

7. Какие переменные называются фиктивными? Какие возможности появляются у исследователя, использующего фиктивные переменные?

8. Как выглядит диаграмма рассеяния наблюдений в случае гетероскедастичности остатков? Опишите процедуру «взвешенного» МНК.

4. Системы регрессионных уравнений

1. Приведите пример системы регрессионных уравнений. Какие переменные в системе называются экзогенными? Какие переменные в модели называются эндогенными?

2. Какая форма модели называется структурной?

3. Какая форма модели называется приведенной? Как преобразовать приведенную форму в структурную?

4. Сформулируйте необходимое условие идентифицируемости параметров уравнения в системе регрессионных уравнений.

5. Временные ряды. Авторегрессия

1. Приведите примеры временных рядов. Как выделятся тренд временного ряда?

2. Как вычисляется ряд разностей временного ряда? Как вычисляется автокорреляционная функция временного ряда?

3. Как по виду автокорреляционной функции определить статистические свойства временного ряда?

4. Что называется авторегрессией? Как осуществляется оценка параметров и прогнозирование в авторегрессии?

5. Как вычисляется отношение Дарбина-Ватсона? Как с помощью этого отношения определить наличие или отсутствие корреляции остатков у временного ряда?

ЛИТЕРАТУРА

1. Эконометрика: Учебник/Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002.
2. Практикум по эконометрике: Учебное пособие /Под ред. И.И. Елисеевой. – М.: Финансы и статистика, 2002.
3. Магнус Я.Р., Катышев П.К., Пересецкий А.А. Эконометрика: Начальный курс. – М.: Дело, 2001.
4. Катышев П.К., Пересецкий А.А. Сборник задач к начальному курсу эконометрики. – М.: Дело, 1999.
5. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики: Учебник. – М.: ЮНИТИ, 1998.
6. Доугерти К. Введение в эконометрику. – М.: ИНФРА-М, 2001.
7. Колемаев В.А. Эконометрика: Учебник. – М.: ИНФРА-М, 2004.
8. Мардас А.Н. Эконометрика. – СПб.: Питер, 2001.
9. Бородич С.А. Эконометрика. – Минск: ООО «Новое знание», 2001.
10. Тихомиров Н.П., Дорохина Е.Ю. Эконометрика. - М.: «Экзамен», 2003.

Приложение 1

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонний)			Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двусторонний)		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
1	6,314	12,706	63,656	26	1,706	2,056	2,779
2	2,920	4,303	9,925	27	1,703	2,052	2,771
3	2,353	3,182	5,841	28	1,701	2,048	2,763
4	2,132	2,776	4,604	29	1,699	2,045	2,756
5	2,015	2,571	4,032	30	1,697	2,042	2,750
6	1,943	2,447	3,707	31	1,696	2,040	2,744
7	1,895	2,365	3,499	32	1,694	2,037	2,738
8	1,860	2,306	3,355	33	1,692	2,035	2,733
9	1,833	2,262	3,250	34	1,691	2,032	2,728
10	1,812	2,228	3,169	35	1,690	2,030	2,724
11	1,796	2,201	3,106	36	1,688	2,028	2,719
12	1,782	2,179	3,055	37	1,687	2,026	2,715
13	1,771	2,160	3,012	38	1,686	2,024	2,712
14	1,761	2,145	2,977	39	1,685	2,023	2,708
15	1,753	2,131	2,947	40	1,684	2,021	2,704
16	1,746	2,120	2,921	41	1,683	2,020	2,701
17	1,740	2,110	2,898	42	1,682	2,018	2,698
18	1,734	2,101	2,878	43	1,681	2,017	2,695
19	1,729	2,093	2,861	44	1,680	2,015	2,692
20	1,725	2,086	2,845	45	1,679	2,014	2,690
21	1,721	2,080	2,831	46	1,679	2,013	2,687
22	1,717	2,074	2,819	47	1,678	2,012	2,685
23	1,714	2,069	2,807	48	1,677	2,011	2,682
24	1,711	2,064	2,797	49	1,677	2,010	2,680
25	1,708	2,060	2,787	50	1,676	2,009	2,678

Приложение 2

Критические точки распределения Фишера
(уровень значимости 0,05)

k_2 \ k_1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	161,446	199,499	215,707	224,583	230,160	233,988	236,767	238,884	240,543	241,882
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,329	19,353	19,371	19,385	19,396
3	10,128	9,552	9,277	9,117	9,013	8,941	8,887	8,845	8,812	8,785
4	7,709	6,944	6,591	6,388	6,256	6,163	6,094	6,041	5,999	5,964
5	6,608	5,786	5,409	5,192	5,050	4,950	4,876	4,818	4,772	4,735
6	5,987	5,143	4,757	4,534	4,387	4,284	4,207	4,147	4,099	4,060
7	5,591	4,737	4,347	4,120	3,972	3,866	3,787	3,726	3,677	3,637
8	5,318	4,459	4,066	3,838	3,688	3,581	3,500	3,438	3,388	3,347
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,293	3,230	3,179	3,137
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,135	3,072	3,020	2,978
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,095	3,012	2,948	2,896	2,854
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,996	2,913	2,849	2,796	2,753
13	4,667	3,806	3,411	3,179	3,025	2,915	2,832	2,767	2,714	2,671
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,764	2,699	2,646	2,602
15	4,543	3,682	3,287	3,056	2,901	2,790	2,707	2,641	2,588	2,544
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,852	2,741	2,657	2,591	2,538	2,494
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,614	2,548	2,494	2,450
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,577	2,510	2,456	2,412
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,628	2,544	2,477	2,423	2,378
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,514	2,447	2,393	2,348
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,488	2,420	2,366	2,321
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,464	2,397	2,342	2,297
23	4,279	3,422	3,028	2,796	2,640	2,528	2,442	2,375	2,320	2,275
24	4,260	3,403	3,009	2,776	2,621	2,508	2,423	2,355	2,300	2,255
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,405	2,337	2,282	2,236
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,388	2,321	2,265	2,220

27	4,210	3,354	2,960	2,728	2,572	2,459	2,373	2,305	2,250	2,204
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,359	2,291	2,236	2,190
29	4,183	3,328	2,934	2,701	2,545	2,432	2,346	2,278	2,223	2,177
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,334	2,266	2,211	2,165
31	4,160	3,305	2,911	2,679	2,523	2,409	2,323	2,255	2,199	2,153
32	4,149	3,295	2,901	2,668	2,512	2,399	2,313	2,244	2,189	2,142
33	4,139	3,285	2,892	2,659	2,503	2,389	2,303	2,235	2,179	2,133
34	4,130	3,276	2,883	2,650	2,494	2,380	2,294	2,225	2,170	2,123
35	4,121	3,267	2,874	2,641	2,485	2,372	2,285	2,217	2,161	2,114
36	4,113	3,259	2,866	2,634	2,477	2,364	2,277	2,209	2,153	2,106
37	4,105	3,252	2,859	2,626	2,470	2,356	2,270	2,201	2,145	2,098
38	4,098	3,245	2,852	2,619	2,463	2,349	2,262	2,194	2,138	2,091
39	4,091	3,238	2,845	2,612	2,456	2,342	2,255	2,187	2,131	2,084
40	4,085	3,232	2,839	2,606	2,449	2,336	2,249	2,180	2,124	2,077
45	4,057	3,204	2,812	2,579	2,422	2,308	2,221	2,152	2,096	2,049
50	4,034	3,183	2,790	2,557	2,400	2,286	2,199	2,130	2,073	2,026
55	4,016	3,165	2,773	2,540	2,383	2,269	2,181	2,112	2,055	2,008
60	4,001	3,150	2,758	2,525	2,368	2,254	2,167	2,097	2,040	1,993
65	3,989	3,138	2,746	2,513	2,356	2,242	2,154	2,084	2,027	1,980
70	3,978	3,128	2,736	2,503	2,346	2,231	2,143	2,074	2,017	1,969
80	3,960	3,111	2,719	2,486	2,329	2,214	2,126	2,056	1,999	1,951
90	3,947	3,098	2,706	2,473	2,316	2,201	2,113	2,043	1,986	1,938
100	3,936	3,087	2,696	2,463	2,305	2,191	2,103	2,032	1,975	1,927
110	3,927	3,079	2,687	2,454	2,297	2,182	2,094	2,024	1,966	1,918
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,087	2,016	1,959	1,910

Подписано в печать 26.12.2014 г. Тираж 500 экз.
Формат изд. 60х84/16. Объем 3 усл. печ. л.
Отпечатано в типографии " ИП Волков А.И."
Райымбека 212/1, оф. 319. Тел.: 330-03-12, 330-03-13