АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ НЕГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ «САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОФСОЮЗОВ»

С.Ж. КАРАТАБАНОВА, И.Г. ПОЛЕГЕНЬКО,
Л.А. ХАРАСАХАЛ

«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ»

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ СПЕЦИАЛЬНОСТИ
080100.62 – «ЭКОНОМИКА»

Алматы
2013

Рецензенты:

Хомпыш Х., кандидат физико-математических наук, старший преподаватель Казахского Национального университета им. Аль-Фараби

Тимошенко В.Ф., кандидат экономических наук, доцент Алматинского филиала НОУ ВПО «Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

Авторы-составители:

КАРАТАБАНОВА С.Ж., кандидат физико-математических наук, доцент Алматинского филиала НОУ ВПО «Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

ПОЛЕГЕНЬКО И.Г., кандидат технических наук, доцент Алматинского филиала НОУ ВПО «Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

ХАРАСАХАЛ Л.А., старший преподаватель Алматинского филиала НОУ ВПО «Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

Методические рекомендации по проведению практических занятий предназначены в помощь студентам для более глубокого практического освоения дисциплины «Математический анализ». Они включают краткий теоретический материал, примеры решения задач, задания для самостоятельной работы и варианты контрольных работ.

Рекомендовано к печати
Методическим советом Алматинского филиала НОУ ВПО «Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»
от «_20_» _марта_ 2013 г. Протокол № _5_.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Целью дисциплины «Математический анализ» является овладение студентами методами исследования переменных величин, основными понятиями и методами теории пределов, дифференциального исчисления функций одной переменной и нескольких действительных переменных, интегрального исчисления функций одной и многих переменных, теории числовых и функциональных рядов, рядов Фурье. Дисциплина является базовой для изучения всех математических и специальных дисциплин.

В результате изучения дисциплины «Математический анализ» студент должен понимать проблему логического обоснования математического анализа и возможность различных путей ее решения; знать один из путей построения теории вещественных чисел, непрерывных и дифференцируемых функций, основные формулы вычисления пределов, дифференцирования и интегрирования.

Студент должен уметь исследовать, дифференцировать и интегрировать функции, вычислять предельные значения функций, вычислять приближенные значения функций, строить графики, уметь исследовать числовые и функциональные ряды.

Дисциплина «Математический анализ» входит в цикл общих математических и естественнонаучных дисциплин образовательной программы направления 080100.62 «Экономика».

Требование к входным знаниям и умениям студента - это знание элементарной математики: алгебры, элементарных функций, умение дифференцировать.

Освоение дисциплины «Математический анализ» необходимо для таких дисциплин, как: Макроэкономика, Микроэкономика, Теория отраслевых рынков, Экономика общественного сектора, Институционная экономика, Теория вероятностей, Эконометрика, Математическая статистика, Методы оптимальных решений, Дифференциальные уравнения.

Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование у студента следующих ***компетенций***:

ПК-2 - способность на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов;

ПК-3 - способность выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами;

ПК-5 - способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы;

ПК-14 - способность преподавать экономические дисциплины в образовательных учреждениях различного уровня, используя существующие программы и учебно-методические материалы;

ПК-15 - способность принять участие в совершенствовании и разработке учебно-методического обеспечения экономических дисциплин.

1. ТЕОРИЯ ПРЕДЕЛОВ

1.1 Предел числовой последовательности

Частным случаем функции является функция натурального аргумента *f(n)* $(n \in N)$, которая обычно обозначается x_n и называется числовой последовательностью. Областью определения такой функции является множество N натуральных чисел, а каждое значение x_n называется членом последовательности. Формула $x_n = f(n)$ называется формулой общего члена последовательности (x_n) $(n \in N)$. Значению аргумента n соответствует число x_n, стоящее на месте с номером n в этой последовательности. Числовая последовательность считается заданной, если указано правило, по которому каждому значению n (натуральному числу) поставлено в соответствие единственное значение x_n.

Пример. Написать первые пять членов числовой последовательности

$$x_n = \frac{2n-1}{n^2+5}.$$

Решение. Давая значения $n = 1,2,3,4,5$, будем иметь

$$\frac{1}{6}, \frac{3}{9}, \frac{5}{14}, \frac{7}{21}, \frac{9}{30}, \ldots$$

Последовательность (x_n) называется ограниченной, если существует число M такое, что справедливо неравенство $|x_n| \le M$. В этом случае последовательность будет ограничена и снизу и сверху.

Последовательность (x_n) называется возрастающей (неубывающей), если для всех $n \in N$ справедливо неравенство $x_{n+1} \ge x_n$, и убывающей (невозрастающей), если для всех $n \in N$ справедливо неравенство $x_{n+1} \le x_n$.

Число a называется пределом последовательности (x_n), $n \in N$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что при $n > N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$.

При этом сама последовательность называется сходящейся. Предел последовательности (x_n) записывает в виде

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

УПРАЖНЕНИЯ

- *Написать первые пять членов последовательности:*

1. $x_n = \dfrac{2n^2+1}{n^2+3}.$

4. $x_n = (-1)^{n+1}\dfrac{2n+1}{n(n+1)}.$

2. $x_n = n(1-(-1)^n)$.

3. $x_n = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + n\pi$.

5. $x_n = \frac{3n+1}{2n-3}$.

6. $x_n = \frac{\cos n}{n^2}$.

- *Написать общий член последовательности:*

7. $1, \frac{3}{4}, \frac{5}{9}, \frac{7}{16}, \frac{9}{25}, \ldots$

8. $\frac{3}{1\cdot 2}, \frac{6}{2\cdot 3}, \frac{9}{3\cdot 4}, \frac{12}{4\cdot 5}, \ldots$

9. $-3, \frac{5}{3}, -\frac{7}{5}, \frac{9}{7}, -\frac{11}{9}, \ldots$

10. $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, -\frac{1}{32}, \ldots$

- *Вычислить пределы:*

11. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n-2}{3n}$.

12. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+2)}{3n^2}$.

13. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^2} + \ldots + \frac{n-1}{n^2} \right)$.

14. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{6n+2}{7-3n}$.

15. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{3n}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3}$.

1.2 Предел функции в точке

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0, за исключением , быть может, самой точки.

Число A называется пределом функции *f(x)* при $x \to x_0$, если для любого числа ε > 0 найдется такое число δ = δ(ε) > 0, что для всех *x*, для которых выполняется неравенство $0 < |x - x_0| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon .$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$.

1.3 Односторонние пределы

Для исследования поведения функции вблизи некоторых точек рассматриваются пределы функции *f(x)*, когда $x \to x_0$, оставаясь правее x_0 (т.е. при $x > x_0$); и когда $x \to x_0$, оставаясь левее x_0 (т.е. при $x < x_0$). Такие пределы функции (если они существуют) называются соответственно правым или левым пределами функции в точке x_0 (или пределами функции справа или слева в точке x_0). Эти пределы обозначаются следующим образом:

$$\lim_{x\to x_0+0} f(x) = f(x_0+0) - \text{ предел справа;}$$

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x) = f(x_0-0) - \text{ предел слева.}$$

1.4 Предел функции в бесконечно удаленной точке

Предел функции обобщается на тот случай, когда x_0 не является конечным числом. Можно ввести понятие окрестности бесконечно удаленной точки как множество всех значений *x*, для которых $|x|>M$, где $M > 0$ – произвольное число. Тогда можно дать следующее определение предела функции *f(x)* при $x \to \infty$:

Число *A* называется пределом функции *f(x)* при $x \to \infty$, если для любого числа ε > 0 найдется такое число $M = M(\varepsilon) > 0$, что для всех *x*, удовлетворяющих неравенству $|x| > M$, будет выполняться неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

В этом случае пишут $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$.

1.5 Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$ (или $x \to \infty$), если $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = 0$ $(\lim\limits_{x\to\infty}\alpha(x) = 0)$.

1.6 Свойства бесконечно малых функций

Будем предполагать, что все рассматриваемые функции определены в одной и той же области изменения аргумента.

1. Сумма конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
2. Произведение конечного числа бесконечно малых функций есть функция бесконечно малая.
3. Произведение бесконечно малой функции на ограниченную функцию есть функция бесконечно малая.

Функция *f(x)* называется бесконечно большой при $x \to a$, если для любого числа $M > 0$ найдется число $\delta(M) > 0$ такое, что для всех x, $|x - a| < \delta$ и $x \neq a$, выполняется неравенство $|f(x)| > M$.

В этом случае говорят, что функция *f(x)* стремится к бесконечности при $x \to a$ и записывают $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.

Между бесконечно малыми и бесконечно большими функциями существует простая связь: если функция $\alpha(x)$ при $x \to a$ есть бесконечно малая, то функция $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ при $x \to a$ есть бесконечно большая. Верно и обратное утверждение.

1.7 Основные теоремы о пределах

Пусть функции *f(x)* и *φ(x)* имеют предел при $x \to a$, тогда при одном и том же стремлении *x* имеют место следующие теоремы:

1. $\lim\limits_{x\to a}[f(x) \pm \varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x) \pm \lim\limits_{x\to a}\varphi(x).$
2. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)] = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}\varphi(x).$
3. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}$ при условии, что $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) \neq 0.$
4. $\lim\limits_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)} = [\lim\limits_{x\to a} f(x)]^{\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)}.$
5. Для всех основных элементарных функций в произвольной точке их области определения имеет место равенство

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(\lim_{x\to a} x).$$

1.8 Два замечательных предела и их следствия

При нахождении пределов функций важную роль играют два предела, которые называются “замечательными”.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1 -$$ **первый замечательный предел**

или, в более общей форме

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$.

Следствия первого замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = 0,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} = 1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{arctgx}{x} = 1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e -$$ **второй замечательный предел.**

Второй замечательный предел может быть записан в виде

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e,$$

или, в более общей форме

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}(1+\alpha(x))^{\frac{1}{\alpha(x)}} = e,$$

где $\alpha(x)$ – бесконечно малая при $x \to a$.

Число e = 2,718281… является иррациональным числом. Логарифмы по основанию e называются натуральными и обозначаются знаком *ln,* $\log_e x = \ln x$.

Следствия второго замечательного предела:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a,\ \ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1.$$

1.9 Сравнение бесконечно малых. Эквивалентные бесконечно малые

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ – бесконечно малые функции при $x\to a$, $(x\to\infty)$. Сравнить две бесконечно малые функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$, значит найти предел их отношения $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}$. При этом:

- если $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются бесконечно малыми одного порядка;
- если $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$, то бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными бесконечно малыми;
- если $\lim\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ $\left(\lim\frac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\infty\right)$, то бесконечно малая $\alpha(x)$ называется бесконечно малой более высокого порядка, чем $\beta(x)$.

1.10 Вычисление пределов

Элементарные приемы и использование замечательных пределов

При вычислении пределов различных функций наиболее часто применяются правила предельного перехода. Однако применение этих правил невозможно в особых случаях, называемых неопределенностями, которые возникают вследствие нарушения условий предельных переходов. При вычислении предела $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ в случае, когда $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=0$ имеет место неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Если же $\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\varphi(x)=\infty$, то имеет место неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ – бесконечно большие функции одного знака, то предел $\lim_{x\to a}[f(x)-\varphi(x)]$ дает неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Если же одна из функций является бесконечно малой, а вторая – бесконечно большой, то предел $\lim_{x\to a}f(x)\varphi(x)$ дает неопределенность вида $0\cdot\infty$. Существуют также неопределенности вида 1^∞, 0^0, ∞^0, относящиеся к пределу $\lim_{x\to a}[f(x)]^{\varphi(x)}$.

Пример 1. Вычислить $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}$.

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$ создает множитель (x – 1). В числителе и знаменателе выделим множитель (x – 1). После сокращения перейдем к пределу:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x+1}{x-2}=-1.$$

Пример 2. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+6}-\sqrt{3-x}}{x^2+6x+5}$.

Решение. При x = -1 имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. В числителе и знаменателе выделим множитель (x +1). Для этого умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю. После сокращения перейдем к пределу. Будем иметь

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{2x+6}-\sqrt{3-x}}{x^2+6x+5}=\lim_{x\to -1}\frac{(\sqrt{2x+6}-\sqrt{3-x})(\sqrt{2x+6}+\sqrt{3-x})}{(x+1)(x+5)(\sqrt{2x+6}+\sqrt{3-x})}=$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{2x+6-3+x}{(x+1)(x+5)(\sqrt{2x+6}+\sqrt{3-x})}=\lim_{x\to -1}\frac{3}{(x+5)(\sqrt{2x+6}+\sqrt{3-x}}=\frac{3}{16}.$$

Пример 3. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}$.

Решение. Применим первый замечательный предел. Числитель дроби умножим и разделим на $5x$, а знаменатель – на $2x$. Получим:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5x}{\frac{\sin 2x}{2x}\cdot 2x}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x}}\cdot\frac{5}{2}=\frac{5}{2}.$$

Пример 4. Вычислить $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\sin 4x}$.

Решение. Этот предел можно вычислить с помощью первого замечательного предела. Так как аргументы тригонометрических функций не являются бесконечно малыми при $x\to\frac{\pi}{2}$, то необходимо сделать замену переменной, полагая $t=\frac{\pi}{2}-x\ \ (\textit{при}\ \ x\to\frac{\pi}{2}\ \ t\to 0)$:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 5x}{\sin 4x}=\begin{vmatrix} t=\frac{\pi}{2}-x,\ \ x\to\frac{\pi}{2} \\ x=\frac{\pi}{2}-t,\ \ t\to 0 \end{vmatrix}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos 5\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}{\sin 4\left(\frac{\pi}{2}-t\right)}=\lim_{t\to 0}\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2}-5t\right)}{\sin\left(2\pi-4t\right)}=$$

$$=\lim_{t\to 0}\frac{\sin 5t}{\sin(-4t)}=-\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\sin 5t}{5t}\cdot 5t}{\frac{\sin 4t}{4t}\cdot 4t}=-\frac{1\cdot 5}{1\cdot 4}=-\frac{5}{4}.$$

При вычислении пределов, имеющих неопределенность вида $\frac{0}{0}$, удобно применять свойства бесконечно малых функций. Бесконечно малые функции можно заменять на эквивалентные и после этого переходить к пределу.

Приведем таблицу эквивалентных бесконечно малых при $\alpha \to 0$. При этом α может быть функцией от x, т.е. $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$.

1.11 Таблица эквивалентных бесконечно малых

1	$sin\alpha \sim \alpha$	2	$tg\alpha \sim \alpha$
3	$arcsin\alpha \sim \alpha$	4	$arctg\alpha \sim \alpha$
5	$1-\cos\alpha \sim \frac{\alpha^2}{2}$	6	$\ln(1+\alpha) \sim \alpha$
7	$a^\alpha - 1 \sim \alpha \ln a$	8	$e^\alpha - 1 \sim \alpha$
9	$\sqrt{1+\alpha} - 1 \sim \frac{\alpha}{2}$	10	$(1+\alpha)^p \sim 1-\alpha p$

Пример 5. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin^2 3x}$.

Решение. Так как $1-\cos 5x \sim \frac{(5x)^2}{2}$, $\sin 3x \sim 3x$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{\sin^2 3x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{(5x)^2}{2}}{(3x)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{18x^2} = \frac{25}{18}.$$

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}$.

Решение. Неопределенность $\frac{0}{0}$. Так как $2^x - 1 \sim x\ln 2$, $3^x - 1 \sim x\ln 3$, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1} = \lim_{x\to 0}\frac{x\ln 2}{x\ln 3} = \frac{\ln 2}{\ln 3}.$$

При вычислении предела отношения двух целых многочленов относительно x при $x \to \infty$ будем иметь неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. В этом случае и числитель, и знаменатель дроби нужно разделить на старшую степень знаменателя и после этого перейти к пределу.

Аналогичный прием во многих случаях можно применить и для дробей, содержащих иррациональности.

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^3-7x^2+15x+2}{4x^3+7x^2-3x+8}$.

Решение. При достаточно больших $|x|$ величина определителя определяется старшим членом $3x^3$. Роль остальных слагаемых тем незначительнее, чем больше $|x|$. В знаменателе при росте $|x|$ определяющее значение приобретает слагаемое $4x^3$. Числитель и знаменатель отношения разделим на старшую степень знаменателя – на x^3. После этого перейдем к пределу при $x \to \infty$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-7x^2+15x+2}{4x^3+7x^2-3x+8}=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{7}{x}+\frac{15}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{4+\frac{7}{x}-\frac{3}{x^2}+\frac{8}{x^3}}=\frac{3}{4}.$$

Слагаемые $\frac{7}{x}$, $\frac{15}{x^2}$, $\frac{2}{x^3}$, $\frac{3}{x^2}$, $\frac{8}{x^3}$ есть бесконечно малые при $x \to \infty$.

При вычислении пределов в случае неопределенности ∞/∞ для упрощения вычислений применяются эквивалентные бесконечно большие функции и их свойства. Простейшие примеры эквивалентных бесконечно больших получаются из рассмотрения многочлена $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_{n-1}x+a_n$.

При $x\to\infty$ будем иметь:

$P_n(x)\sim a_0x^n$; $P_n^k(x)\sim a_0x^{nk}$; $\ln P_n(x)\sim n\ln x$ $(a_0>0,\ k>0)$.

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2\sqrt{x^4+3x^2-5}}{3x^4-5x^3+7x-1}$.

Решение. Неопределенность вида ∞/∞. Воспользуемся эквивалентностью бесконечно больших:

$(2x+3)^2\sim(2x)^2$, $(x^4+3x^2-5)^{0,5}\sim x^2$, $(3x^4-5x^3+7x-1)\sim 3x^4$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2\sqrt{x^4+3x^2-5}}{3x^4-5x^3+7x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x+3)^2(x^4+3x^2-5)^{0,5}}{3x^4-5x^37x-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)^2\cdot x^2}{3x^4}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^4}{3x^4}=\frac{4}{3}.$$

1.12 Предел степенно показательного выражения. Неопределенность 1^∞

При нахождении пределов вида $\lim\limits_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=C$ следует иметь в виду, что:

1) если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A$ *и* $\lim\limits_{x\to a}v(x)=B$, то C= A^B.

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)}=A^B.$$

2) если $\lim\limits_{x\to a}u(x)=A\neq 1$ *и* $\lim\limits_{x\to a}v(x)=\pm\infty$, то вопрос о нахождении предела решается непосредственно

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \begin{cases} 0, \text{ } если \text{ } A<1 \text{ } и \text{ } \lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty. \\ \infty, \text{ } если \text{ } A>1 \text{ } и \text{ } \lim\limits_{x\to a} v(x) = +\infty. \\ \infty, \text{ } если \text{ } A<1 \text{ } и \text{ } \lim\limits_{x\to a} v(x) = -\infty. \\ 0, \text{ } если \text{ } A>1 \text{ } и \text{ } \lim\limits_{x\to a} v(x) = -\infty. \end{cases}$$

3) если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 1$ *и* $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty,$ то имеет место неопределенность вида 1^{∞}. Получим формулу для вычисления предела в этом случае. Положим $u(x) = 1 + \alpha(x),$ где $\alpha(x) \to 0$ при $x \to a$. Тогда

$$\lim_{x\to a}[u(x)]^{v(x)} = \lim_{x\to a}\left\{[1+\alpha(x)]^{\frac{1}{\alpha(x)}}\right\}^{\alpha(x)v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)v(x)} = e^{\lim\limits_{x\to a}[u(x)-1]v(x)},$$

где e =2,7182… - иррациональное число.

Пример 9. Вычислить $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{3x+1}$.

Решение. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{1}{x}}{3-\frac{2}{x}} = \frac{2}{3}$ и $\lim\limits_{x\to\infty}(3x+1) = \infty.$ Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{3x-2}\right)^{3x+1} = 0.$

Пример 10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{x+1}$.

Решение. Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right) = 1,$ $\lim\limits_{x\to\infty}(x+1) = \infty,$ то имеем неопределенность вида 1^{∞}. Выделим второй замечательный предел и найдем предел.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x-5}\right)^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left[1+\left(\frac{2x+3}{2x-5}-1\right)\right]^{x+1} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{8}{2x-5}\right)^{\frac{2x-5}{8}}\right]^{\frac{8(x+1)}{2x-5}} = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{8x+8}{2x-5}} = e^{4}.$$

1.13 Неопределенности (0·∞), (∞–∞)

При вычислении предела произведения $\lim\limits_{x\to a} u(x)\cdot v(x)$ в случае, если $\lim\limits_{x\to a} u(x) = 0,$ $\lim\limits_{x\to a} v(x) = \infty,$ имеет место неопределенность вида 0·∞, которая легко преобразуется в неопределенности вида $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$ и к которым применяются разобранные выше приемы.

При вычислении предела $\lim\limits_{x \to a}[u(x) - v(x)]$ в случае, если $u(x)$ *и* $v(x)$ являются бесконечно большими функциями при $x \to a$ могут появиться неопределенности вида $(\infty - \infty)$. С помощью элементарных преобразований эта неопределенность сводится к неопределенностям вида $\frac{0}{0}$ *или* $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x \to 2}\left(\frac{2}{x-2} - \frac{16}{3x^2 - 4x - 4}\right)$.

Решение. Приведение дроби к общему знаменателю сменяет неопределенность $(\infty - \infty)$ на неопределенность 0/0, которая раскрывается сокращением дроби на множитель $(x - 2)$.

$$\lim_{x \to 2}\left(\frac{2}{x-2} - \frac{16}{3x^2 - 4x - 4}\right) = \lim_{x \to 2}\left(\frac{2}{x-2} - \frac{16}{(x-2)(3x+2)}\right) = \lim_{x \to 2}\frac{2 \cdot (3x-2) - 16}{(x-2)(3x+2)} =$$

$$= \lim_{x \to 2}\frac{6(x-2)}{(x-2)(3x+2)} = \lim_{x \to 2}\frac{6}{3x+2} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

• *Найти пределы следующих выражений:*

	а) $\lim\limits_{x \to -1}\left(4x^3 + \frac{5}{x} + 7\right)$	б) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{4x^4 + 20}{x^2 + x - 6}$	в) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^3 - 3x - 2}{x^2 - x + 2}$
	а) $\lim\limits_{x \to 2}(4x^3 + 7x)$	б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}}\frac{4x^4 - 3}{27x^3 - 1}$	в) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x - 1}{x^2 - 6x + 2}$
	а) $\lim\limits_{x \to 1}\left(3x^3 - \frac{5}{x} + 17\right)$	б) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{4x^4 + 7}{x^2 - 1}$	в) $\lim\limits_{x \to -1}\frac{x^2 - 2x - 1}{x^4 - x - 2}$
	а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}(\sin 2x + 2tgx)$	б) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{x + 1}{x^2 - 6x + 5}$	в) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{3x - 1}{x^2 - 6x + 8}$
	а) $\lim\limits_{x \to 0}\frac{x^2 - 2}{3x^2 - 6x + 2}$	б) $\lim\limits_{x \to 1}\frac{5x^4 - 1}{x^2 - 3x + 2}$	в) $\lim\limits_{x \to -2}\frac{4x - 1}{x^2 + 6x + 8}$
	а) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}}(\sin 2x + \cos x + 3)$	б) $\lim\limits_{x \to \frac{1}{3}}\frac{8x^3 - 1}{x - 1}$	в) $\lim\limits_{x \to 2}\frac{x^2 + 2x - 3}{x + 2}$

• *Найти пределы выражений, содержащие различные неопределенности:*

1	а) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{4x^3 - 5x^2 + 2}{5x^3 - 3x^2 - x + 6}$	б) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{12x^5 - 5x^2 + 2x - 1}{5x^3 - 13x^2 - 2x + 6}$	в) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{4x^3 - 5x^2 + 2}{6x^4 - 3x^2 - 7x + 6}$
2	а) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{24x^3 - 15x^2 + 2x}{6x^3 - 3x^2 - 4x + 6}$	б) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{2x^4 - 5x^2 + 22x - 1}{5x^3 - 3x^2 - x + 6}$	в) $\lim\limits_{x \to \infty}\frac{34x^3 - 25x^2 + 2x}{17x^4 - 3x^2 - 7x + 2}$

3	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x^5-x^2+12x}{6x^3-3x^5-14x+62}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{32x^2-5x^4+22x}{25x^3-3x^2-6}$	в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-2x^2+12x}{27x^5-3x^2-x+2}$
4	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{42x^3-15x^2+2}{6x^3-13x^2-x+6}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+2x-1}{13x^2-2x+6}$	в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-5x^2+2}{6x^4-3x^5}$
5	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3+2}{7x^3-x+6}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+2x-1}{2x+6}$	в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x-25x^2+2}{x^3-13x^2-7x+6}$
6	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x+2}{x+\sqrt{x}}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{13-2x\sqrt{x}}$	в) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt[4]{x^2+1}}{x+6}$
7	а) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-7x+4}-2x)$	в) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}-\sqrt{x})$
8	а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{2x^2-1}-\dfrac{x^2}{2x+1}\right)$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x^2-5x+4}-\dfrac{x-4}{3(x^2-3x+2)}\right)$	
9	а) $\lim\limits_{x\to\infty}x^{3/2}(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2})$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{4x^2-3x-2}-\sqrt{4x^2-3})$	
10	а) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-8}{3x^2+5x-2}$	б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-16}$	
11	а) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+7x+6}{3x^2+5x-2}$	б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{5x-1}}{x^2-3x+2}$	
12	а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{4x^2-7x+3}$	б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{\sqrt{x-3}-\sqrt{2x-7}}{x^2-16}$	
13	а) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2+x-6}{2x^2+9x+9}$	б) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{\sqrt{3-x}-\sqrt{1-2x}}{x^2-4}$	
14	а) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{x^2-1}{x^3+1}$	б) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2x-13}-\sqrt{x-6}}{x^2-6x-7}$	
15	а) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+5x-3}{6x^2+5x-4}$	б) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{4x-3}-\sqrt{2x+3}}$	
16	а) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}}\dfrac{3x^2-x-2}{6x^2+x-2}$	б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x+6}-\sqrt{2x+3}}{x^2-x-2}$	
17	а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}\dfrac{4x^2+11x-3}{4x^2+7x-2}$	б) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+3x-4}{\sqrt{2x+9}-\sqrt{x+5}}$	
18	а) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{3}}\dfrac{6x^2+7x-3}{3x^2-4x+1}$	б) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{\sqrt{3x+10}-\sqrt{x+4}}{x^2+4x+3}$	
19	а) $\lim\limits_{x\to-\frac{1}{3}}\dfrac{3x^2+4x+1}{3x^2-5x-2}$	б) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+1}-\sqrt{1-2x}}{2x^2-x}$	

•*Используя замечательные пределы и их следствия, найти пределы функций:*

1	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x-2}\right)^{x}$	2	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg5x}{3x}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x-2}\right)^{x}$
3	а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin(x-1)}{(x^2-1)}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2x}\right)^{x}$	4	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 5x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{1}{5x}\right)^{x+2}$
5	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{3x}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+6x)^{\frac{2}{x}}$	6	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 4x}{3x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-4x)^{\frac{2}{x}}$
7	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}(1-x^2)^{\frac{2}{x^2}}$	8	а) $\lim\limits_{x\to 0} x ctg 3x$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-3}\right)^{x-3}$
9	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x^2-4)}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{2-x}\right)^{x}$	10	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x}{1-\cos 3x}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-3}\right)^{4x}$
11	а) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{(x^2-3x+2)}$	б) $\lim\limits_{x\to -1}(4x+5)^{\frac{2}{x^2-1}}$	12	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\cos x}{\sin^2 x}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x^2+x}$
13	а) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{tg\pi x}{x+2}$	б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+10x)}{x}$	14	а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx-\sin x}{3x^2}$	б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+2}{4x-3}\right)^{x-3}$

•*Используя эквивалентные бесконечно малые, найти пределы:*

1	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{tg 2x}$	2	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+5x^2)}{x^3+3x^2}$	3	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{tg 2x}$
4	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{x^2+27x}$	5	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^{2x}-1}{x^2+x}$	6	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 4x}{2x^2+3x}$
7	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 5x}{2x-x^2}$	8	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{arctg 2x}$	9	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 2x}$
10	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-1}{tg 5x}$	11	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\sin x+7x}$	12	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{3x}-e^{x}}{\sin x+tg 7x}$
13	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 2x+x^2}{1-\cos 3x+2x^2}$	14	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x-x^2)}{tg 2x}$	15	$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{x tg 2x}$

1.14 Непрерывность функции

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она:

1) определена в точке x_0 и в некоторой ее окрестности;
2) существует $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, равный значению функции в точке x_0, т.е.

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Можно дать определение непрерывности функции в точке, используя приращение функции и приращение аргумента. Полагая $x = x_0 + \Delta x,$ где $\Delta x \to 0$, условие 2) можно записать в виде:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0,$$

т.е. функция $y = f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда в этой точке бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

Функция называется непрерывной в интервале (a,b), если она непрерывна в каждой точке этого интервала.

Если в точке x_0 нарушаются условия непрерывности, то говорят, что в этой точке функция терпит разрыв, а сама точка называется точкой разрыва. При этом различают следующие случаи:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ существует, но функция $f(x)$ не определена в точке x_0 или не выполняется условие $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. В этом случае x_0 называется точкой устранимого разрыва;

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ не существует. Если при этом существуют оба односторонние предела $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$, не равные друг другу, то x_0 называется точкой разрыва I-го рода;

3) если не существует хотя бы один из односторонних пределов или он равен бесконечности, то x_0 называется точкой разрыва II- рода.

Свойства непрерывных функций. При исследовании функции на непрерывность нужно иметь в виду следующие теоремы.

Теорема 1. Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ непрерывны в точке x_0, то функции $f(x) \pm \varphi(x),\ f(x) \cdot \varphi(x),\ \dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ при условии, что $\varphi(x_0) \neq 0,$ также непрерывны в точке x_0.

Теорема 2. Если функция $u = \varphi(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = \varphi(x_0),$ то и сложная функция $y = f(\varphi(x))$ непрерывна в точке x_0.

Терема 3. Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке своей области определения.

Пример. Дана функция $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$. Требуется:

1) найти точки разрыва функции;
2) найти левый и правый пределы функции в точках разрыва;
3) определить характер точек разрыва.

Решение.

1) При отыскании точек разрыва следует иметь в виду, что точками разрыва элементарной функции являются только те точки, в которых она не определена (при условии, что она определена в некоторой окрестности рассматриваемой точки). Функция $f(x) = 3^{\frac{1}{x-2}}$ не определена в точке $x = 2$, которая не входит в область определения функции, но функция определена в окрестности этой точки, следовательно, $x = 2$ - точка разрыва.

2) Найдем односторонние пределы функции

$$f(2-0) = \lim_{x \to 2-0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left| 3^{\frac{1}{-0}} = 3^{-\infty} \right| = 0.$$

$$f(2+0) = \lim_{x \to 2+0} 3^{\frac{1}{x-2}} = \left| 3^{\frac{2}{+0}} = 3^{=\infty} \right| = \infty.$$

3) так как один из односторонних пределов $f(2+0) = \infty$, то $x = 2$ будет точкой разрыва второго рода.

УПРАЖНЕНИЯ

Задача 1. Функция задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения независимой переменной. Требуется:

а) найти точки разрыва функции, если они существуют;

б) найти скачок функции в каждой точке разрыва;

в) сделать схематический чертеж.

1. $y = \begin{cases} x+4, & если\ x < -1; \\ x^2+2, & если -1 \le x < 1; \\ 2x, & если\ x \ge 1. \end{cases}$

2. $y = \begin{cases} x+1, & если\ x \le 0; \\ (x+1)^2, & если\ 0 < x \le 2; \\ -x+4, & если\ x > 2. \end{cases}$

3. $y = \begin{cases} x+2, & если\ x \le -1; \\ x^2+1, & если -1 < x \le 1; \\ -x+3, & если\ x > 1. \end{cases}$

4. $y = \begin{cases} -x, & если\ x \le 0; \\ -(x-1)^2, & если\ 0 < x < 2; \\ x-3, & если\ x \ge 2. \end{cases}$

5. $y = \begin{cases} -x-2, & если\ x \le -2; \\ 4-x^2, & если\ -2 < x \le 1; \\ x-1, & если\ x > 1. \end{cases}$

6. $y = \begin{cases} -2(x+1), & если\ x \le -1; \\ (x+1)^2, & если\ -1 < x < 0; \\ x, & если\ x \ge 0. \end{cases}$

Задача 2. Дана функция *y=f(x)* и два значения аргумента x_1 и x_2.

а) Исследовать функцию на непрерывность для каждого из данных значений аргумента.

б) В случае разрыва найти пределы функции слева и справа от точки разрыва.

в) Определить вид точки разрыва.

1	$f(x)=\dfrac{5x+2}{x^2-4}, \quad x_1=1, \;\; x_2=2.$	2	$f(x)=6^{\frac{1}{x-3}}, \quad x_1=3, \;\; x=4.$
3	$f(x)=\dfrac{3x+2}{x^2+x-2}, \quad x_1=1, \;\; x_2=2.$	4	$f(x)=4^{\frac{1}{x+3}}, \quad x_1=-1, \;\; x=0.$
5	$f(x)=\dfrac{1}{2+2^{\frac{1}{x+3}}}, \quad x_1=-3, \;\; x=-4.$	6	$f(x)=\dfrac{2}{\ln\|x-2\|}, \quad x_1=3, \;\; x_2=2.$
7	$f(x)=\dfrac{2}{2+5^{\frac{1}{x-3}}}, \quad x_1=3, \;\; x=4.$	8	$f(x)=\dfrac{2}{\ln\|x+2\|}, \quad x_1=-3, \;\; x_2=-2.$

2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1 Определение производной

Производной функции y = f(x) в точке x_0 называется предел отношения приращения функции $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$. Производная функции y = f(x) в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ или $y'(x_0)$. Будем иметь

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Операция нахождения производной называется дифференцированием. Всякая функция, имеющая производную в точке x_0, называется дифференцируемой в этой точке. Функция, дифференцируемая в каждой точке интервала (*a,b*), называется дифференцируемой в этом интервале. Производная функции *f(x),* рассматриваемая на множестве тех точек, где она существует, сама является функцией от *x*.

Производная $f'(x_0)$ есть скорость изменения функции *y = f(x)* в точке x_0 (другими словами, скорость изменения зависимой переменной *y* по отношению к изменению независимой переменной *x* в точке x_0). В частности, если *x* – время, *y = f(x)* – закон движения точки, движущейся по прямой, то $f'(x_0)$ - мгновенная скорость точки в момент времени x_0.

Геометрический смысл производной: производная $f'(x_0)$ функции *y=f(x)* в точке x_0 есть угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции *y=f(x)* в точке с абсциссой x_0 ($k_{кас.} = tg\alpha$).

2.2 Правила дифференцирования

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ дифференцируемы в точке x_0, то сумма, разность, произведение и частное этих функций (частное при условии $v(x_0) \neq 0$) также дифференцируемы в точке x_0, причем справедливы равенства:

$$(Cг)' = C \cdot u', \ C - const.$$

$$(u \pm v)' = u' \pm v',$$

$$(uv)' = u'v + v'u,$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}.$$

2.3 Производная сложной функции

Если функция $u = \varphi(x)$ дифференцируема в точке x_0, а функция *y = f(u)* дифференцируема в точке $u_0 = \varphi(x_0)$, то сложная функция $y = f(\varphi(x))$ дифференцируема в точке x_0 и справедлива формула

$$f'_x(\varphi(x_0)) = f'_u(u_0) \cdot \varphi'_x(x_0).$$

Правило нахождения производной сложной функции распространяется на композицию любого конечного числа функций. Например, для вычисления производной функции $y = f(u(v(x)))$, если функции $y = f(u),\ u = u(v),\ v = v(x)$ дифференцируемы, то справедлива формула

$$y'_x = f'_u(u) \cdot u'_v(v) \cdot v'_x(x).$$

2.4 Производная обратной функции

Пусть задана функция *y=f(x)*. Решив это уравнение относительно *x*, получим *x* как функцию от *y*: $x = \varphi(y)$. Эта функция является обратной для функции *y=f(x)*. Установим связь между производными этих двух функций.

Условием существования обратной функции является строгая монотонность и непрерывность данной функции.

Если функция *y=f(x)* дифференцируема в (a,b), имеет непрерывную обратную функцию $x=\varphi(y)$ и $y'_x \neq 0,\ x \in (a,b)$, то x'_y тоже существует, и справедлива формула

$$x'_y = \frac{1}{y'_x}.$$

2.5 Производная функции, заданной параметрически

Функция *y=f(x)* называется заданной параметрически, если система уравнений $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$, $t \in (\alpha, \beta)$ определяет *y* как функцию от *x*.

Если функция *y=f(x)* задана параметрически $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \phi(t) \end{cases}$, $t \in (\alpha, \beta)$, и функции $\varphi(t),\ \phi(t)$ дифференцируемы, причем $\varphi'(t) \neq 0,\ t \in (\alpha, \beta)$, то производная y'_x существует и находится по формуле:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\phi'_t}{\varphi'_t}.$$

2.6 Производная функции, заданной неявно

Пусть соотношение *F(x,y)*=0 определяет функцию *y=f(x)*. Для нахождения производной y'_x функции *f(x),* задаваемой с помощью соотношения *F(x,y)*=0 (неявно заданной), нужно:

1. Найти производные от обеих частей соотношения *F(x,y)*=0 по *x*, считая *y* функцией от *x* (применяя правило дифференцирования сложной функции).
2. Полученное уравнение разрешить относительно *y'*.

2.7 Логарифмическое дифференцирование

Иногда встречаются функции, у которых переменными являются и основание степени, и показатель степени, т.е. функции вида $y = [u(x)]^{v(x)}$. Такую функцию нельзя дифференцировать как показательную, потому что у нее переменное основание, но нельзя и как степенную: показатель у нее также переменный. Чтобы продифференцировать такую функцию, надо вначале ее прологарифмировать, а затем дифференцировать логарифм.

2.8 Таблица производных основных элементарных функций:

y	y'	y	y'
1. $y = C,\ C = const$	$y' = 0$	2. $y = x^n$	$y' = nx^{n-1}$
3. $y = \sqrt{x}$	$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	4. $y' = a^x$	$y' = a^x \ln a$
5. $y = e^x$	$y' = e^x$	6. $y = \log_a x$	$y' = \frac{1}{x \ln a}$
7. $y = \ln x$	$y' = \frac{1}{x}$	8. $y = \sin x$	$y' = \cos x$
9. $y = \cos x$	$y' = -\sin x$	10. $y = tgx$	$y' = \frac{1}{\cos^2 x}$

11. $y = ctgx$	$y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	12. $y = \arcsin x$	$y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
13. $y = \arccos x$	$y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	14. $y = arctgx$	$y' = \frac{1}{1+x^2}$
15. $y = arcctgx$	$y' = -\frac{1}{1+x^2}$		

Пример 1. Найти производную функции $y = (2x^3 + 4x^2 - 5)\cos x$.

Решение. Применим правило нахождения производной суммы, произведения и таблицу производных:

$$y' = (2x^3 + 4x^2 - 5)'\cos x + (\cos x)(2x^3 + 4x^2 - 5) = (6x^2 + 8x)\cos x - \sin x(2x^3 + 4x^2 - 5).$$

Пример 2. Найти производную сложной функции**:**

1) $y = \sin^3 4x$. 2) $y = \ln tg\frac{x}{2}$. 3) $2^{\arcsin 2x}$.

Решение. 1) Это сложная функция вида $y = u^3$, где $u = \sin v$ и v=4x. Применяя формулу дифференцирования сложной функции для трех основных элементарных функций, будем иметь:

$$y'_x = (u^3)'_u \cdot (\sin v)'_v \cdot (4x)'_x = 3u^2 \cdot \cos v \cdot 4 = 3\sin^2 4x \cdot \cos 4x \cdot 4 = 12\sin^2 4x\cos 4x.$$

2) Здесь также сложная функция. При некотором навыке производная сложной функции находится последовательно для каждой составляющей функции:

$$y' = \left(\ln tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\left(tg\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\left(\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\right)\left(\frac{x}{2}\right)' = \frac{1}{tg\frac{x}{2}}\frac{1}{\cos^2\frac{x}{2}}\frac{1}{2} = \frac{1}{\sin x}.$$

3) $y' = \left(2^{\arcsin 2x}\right)' = 2^{\arcsin 2x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} \cdot 2 = \frac{2 \cdot 2^{\arcsin 2x}}{\sqrt{1+4x^2}}.$

Пример 3. Найти производную функции, заданной неявно:

$$\sin xy + y^3 - 2x^5 + 6 = 0.$$

Решение. Дифференцируем обе части равенства по x, считая y функцией от x:

$$\cos xy(y + xy') + 3y^2y' - 6x^2 = 0\ .$$

Полученное алгебраическое уравнение решаем относительно y':

$$y'(x\cos xy + 3y^2) = 6x^2 - y\cos xy \Rightarrow y' = \frac{6x^2 - y\cos xy}{x\cos xy + 3x^2}.$$

Пример 4. Найти производную y'_x функции, заданной параметрически:

$$\begin{cases} x = a\cos x, \\ y = b\sin x. \end{cases}$$

Решение. Находим x'_t и y'_t: $x'_t = -a\sin x,\ y'_t = b\cos x$. Подставляя полученные выражения в формулу $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, получаем: $y'_x = \dfrac{b\cos t}{-a\sin t} = -\dfrac{b}{a}ctgt.$

Пример 5. Найти производную функции $y = (tg3x)^{2^x}$.

Решение. Прологарифмируем данную функцию по основанию *e:*

$$\ln y = 2^x \ln tg3x.$$

Полученное равенство дифференцируем по *x*, применяя правило дифференцирования неявно заданной функции, произведения и сложной функции. Будем иметь:

$$\frac{1}{y}y' = (2^x \ln tg3x)' = 2^x \ln 2 \cdot \ln tg3x + 2^x \frac{1}{tg3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3,$$

$$y' = (tg3x)^{2^x} (2^x \ln 2 \cdot \ln tg3x + 2^x \frac{1}{tg3x} \cdot \frac{1}{\cos^2 3x} \cdot 3).$$

УПРАЖНЕНИЯ

• *Найти производные следующих функций:*

1. $y = x^4 + 4x^3 - 2x + 6.$
2. $y = 6x^5 + 3x^3 - 2x^2 + 6.$
3. $y = \sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{1}{x} + 6\sqrt{x}.$
4. $y = \sqrt[4]{x^3} + \dfrac{2\sqrt{x}}{x^3} - \dfrac{1}{x^2} + 6x\sqrt{x}.$
5. $y = \dfrac{1}{4}x^4 + 4\cos x - 2^x + 6\ln x.$
6. $y = \dfrac{1}{4}x^6 + 4tgx - 2^x + 6\log_3 x.$
7. $y = \dfrac{1}{4x^3} + 4\arcsin x - 10^x + 6arctgx.$
8. $y = 4e^x + arcctgx - 2^x + 6^x \ln 9.$
9. $y = x\sqrt[3]{x} + \dfrac{2}{tg^3 x} - \dfrac{1}{tgx} + 6\sqrt{x^3}.$
10. $y = \log_4 x + 5^x + 6^x.$
11. $y = (2x^2 + 3x - 5)\sin x.$
12. y=$x^3 tgx + e^x \ln x.$
13. $y = \dfrac{x^2 + 3x - 2}{x^2 - 2}.$
14. $y = \dfrac{\cos x}{1 - 3\sin x}.$
15. $y = \dfrac{ctgx}{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x}(x^2 + 1).$
16. $y = \dfrac{x\sin x}{1 + x}.$
17. $f(x) = x^2 - \dfrac{1}{2x^2}.$ Найти $f'(2) - f'(-2).$
18. $f(x) = \dfrac{x}{3x - 2}.$ Найти $f(0), f'(2), f'(-2)$.
19. $f(x) = \dfrac{3^x - 1}{1 + x^3}.$ Найти $f'(0)$.

20. $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$. Найти $f'(e), f'(1/e), f'(e^2)$.

21. $f(x)=x\ln x$. Найти $f'(1), f'(e), f'(1/e), f'(1/e^2)$.

22. $y=2\sin 3x$.

23. $y=\dfrac{1}{3}\sin(3x+4)$.

24. $y=\dfrac{1}{4}\cos(8-4x)$.

25. $y=\dfrac{1}{k}\cos(b-kx)$.

26. $y=tg5x-ctg3x+\dfrac{x^3}{3}$.

27. $y=7^{2x+3}-e^{3-2x}+6$.

28. $y=\sqrt{x+1}\cdot e^{\frac{x}{2}}$.

29. $y=\dfrac{e^{-x^2}}{3x}-2^{\frac{x}{\ln x}}$.

30. $y=\arcsin 3x+\arccos 3x$.

31. $y=2^{\arcsin 5x}+\arcsin^5 x$.

32. $y=arctg2x-arcctg2x$.

33. $y=e^{arctg3x}+arctge^x$.

34. $y=x\arcsin\ln x+\ln\arcsin x$.

35. $y=\sqrt{1+\sin 4x}-\sqrt{1-\sin 4x}$.

36. $y=\sqrt[4]{(1+\sin^2 x)^3}+\cos\sqrt{x}$.

37. $y=\ln(x+\sqrt{x^2+4})$.

38. $y=\log_4\sin\sqrt{x+1}-\sqrt{\cos 2x}$.

39. $y=\ln(x^2+3x-2)$.

40. $y=\ln(\sqrt{x}+\sqrt{x+4})$.

41. $y=\arcsin\sqrt{x}+\sqrt{\arcsin x}$.

42. $y=\ln arctg\sqrt{1+x^2}-arctg\ln x$.

43. $y=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$.

44. $y=\dfrac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}$.

45. $y=tg\sin\cos x+arctg\sqrt{6x-1}$.

46. $y=tg^3x-3tgx+3x$.

47. $y=\sqrt{1-\arccos^2 x}$.

48. $y=e^{3x}\sin 5x+e^{\cos 5x}$.

49. $\sqrt[3]{\dfrac{\sin 3x}{\cos 5x}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

50. $y=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)$.

51. $y=\sin x\ln\sin x$.

52. $y=\arcsin(e^{3x})+e^{\arcsin x}$.

53. $y=\dfrac{x^2+2x}{\sqrt{x+1}}$.

54. $y=2\ln(x^2+5)-\sqrt{5}arctg\dfrac{x}{\sqrt{5}}$.

55. $y=\dfrac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}$.

56. $y=arctg\dfrac{1}{x}+\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

57. $y=\sin^4 x+\cos^4 x$.

58. $y=\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}\ln\left(tg\dfrac{x}{2}\right)$.

•*Для функций, заданных параметрически, найти* y'_x *:*

59. $\begin{cases} x=2t-t^2, \\ y=3t-t^3. \end{cases}$

60. $\begin{cases} x=\sqrt{3}\cos t, \\ y=\sin 3t. \end{cases}$

61. $\begin{cases} x=2t, \\ y=3t^2-5t. \end{cases}$

62. $\begin{cases} x=2^{-t}, \\ y=2^{2t}. \end{cases}$

63. $\begin{cases} x = \dfrac{2t+t^2}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{2t-t^2}{1+t^2}. \end{cases}$

64. $\begin{cases} x = a(t-\sin t), \\ y = a(1-\cos t). \end{cases}$

65. $\begin{cases} x = a\sin^3 t, \\ y = a\cos^3 t. \end{cases}$

66. $\begin{cases} x = at\cos t, \\ y = at\sin t. \end{cases}$

67. $\begin{cases} x = \ln(1-t^2), \\ y = \arcsin\sqrt{1-t^2}. \end{cases}$

68. $\begin{cases} x = arctge^{\frac{t}{2}}, \\ y = \sqrt{e^t+1}. \end{cases}$

69. $\begin{cases} x = \arcsin(\sin t), \\ y = \arccos(\cos t). \end{cases}$

70. $\begin{cases} x = \sqrt{2t-t^2}, \\ y = \arcsin(t-1). \end{cases}$

71. $\begin{cases} x = \ln(1+t^2), \\ y = t - arctgt. \end{cases}$

72. $\begin{cases} x = tgt, \\ y = \sin 2t + 2\cos 2t. \end{cases}$

•*Найти* y'_x *в указанных точках:*

73. $\begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^2}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^2}. \end{cases}$ $t = 2.$

74. $\left| \begin{array}{l} x = t\ln t, \\ y = \dfrac{\ln t}{t}, \end{array} \right.$ $t = 1.$

75. $\begin{cases} x = t(t\cos t - 2\sin t), \\ y = t(t\sin t + 2\cos t). \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{4}.$

76. $\begin{cases} x = e^t\cos t, \\ y = e^t\sin t. \end{cases}$ $t = \dfrac{\pi}{6}.$

•*Найти* y'_x *для следующих функций, заданных неявно:*

77. $x^3 - 3xy^2 + 4xy - 5y^2 - x + 4 = 0.$

78. $(x+2y)^2 + 4x - 6y - 8 = 0.$

79. $2y\ln y = x^2 + 2x.$

80. $\sin(xy) + \cos(xy) = 0.$

81. $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1.$

82. $e^s\sin y - e^y\cos x = 0.$

83. Найти y'_x в точке $(0;1)$, если $e^y + xy = e.$

84. Найти значение y'_x в точке $x = 1$, если $x^4 - 2x^2y^2 + 5x + y - 5 = 0,\ \ y(1) = 1.$

•*Используя предварительное логарифмирование, найти производные следующих функций:*

85. $y = \dfrac{(x-4)^3(4x+2)}{(x+2)^2}.$

86. $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x-4)(x-2)^2}{x^5}}.$

87. $y = \dfrac{\sqrt{x+4}}{\sqrt[3]{(x-5)^2(3x+5)}}.$

88. $y = \sqrt[4]{\dfrac{(2x+4)(x+2)^2}{(x+7)^5}}.$

89. $y = (arctgx)^{\sin x}.$

90. $y = (\arcsin x)^{x^2+1}.$

91. $y=(tgx)^{\sin\sqrt{x}}$.
92. $y=(ctg\sqrt{x})^{\ln x}$.
93. $y=(x)^{arctgx}$.
94. $y=(\sin x)^{x^2}$.

$\bullet$*Написать уравнения касательной и нормали к кривым в указанных точках:*

95. $y=x^2+4x-3$ в точке (1;2).

Отв. A) $6x-y+2=0,\ \ x+6y-4=0.$ B) $6x+y-4=0,\ \ x-6y-13=0.$

C) $6x-y-4=0,\ \ x+6y-13=0.$ D) $2x-y-4=0,\ \ x+4y-13=0.$

E) $2x-3y-4=0,\ \ 3x+2y-13=0.$

96. $y=-2x^2+3x$ в точке, абсцисса которой равна 2.

Отв. A) $5x-y-8=0,\ \ x+5y-12=0.$ B) $x+3y-8=0,\ \ 3x-2y-12=0.$

C) $5x+y-12=0,\ \ x-5y-8=0.$ D) $5x+y-8=0,\ \ x-5y-12=0.$

E) $-5x+y-8=0,\ \ x+5y-12=0.$

97. $y=x^2+3$ в точке, ордината которой равна 4.

Отв. $2x-y+2=0,\quad x+2y-9=0$ и $2x+y-2=0,\quad x-2y+9=0.$

98. $y=\dfrac{1}{x}$ в точке, абсцисса которой равна 1. Отв. $x+y-2=0,\quad x-y=0.$

99. $x^2+y^2+2y-3=0$ в точке (2;-1). Отв. $x=2,\quad y=-1.$

100. $x^4+y^4-2xy=0$ в точке (1;1).

Отв. A) $x+y+2=0,\quad x+y=0.$ B) $x-y-2=0,\quad x+y=0.$

C) $x+y-2=0,\quad x-y=0.$ D) $x+2y-2=0,\quad 2x-y=0.$

E) $-x+y-2=0,\quad x+y=0.$

101. На линии $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ найти точку, в которой касательная параллельна оси абсцисс. Отв. (0;1).

2.9 Дифференциал функции

Если функция *y=f(x)* дифференцируема в точке *x*, т.е. имеет в этой точке конечную производную $f'(x)$, то ее приращение Δy можно записать в виде:

$$\Delta y = f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,\quad \text{где } \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0.$$

Часть приращения функции $f'(x)\Delta x$, линейная относительно приращения Δx, называется главной частью приращения функции.

Главная часть приращения функции называется дифференциалом функции и обозначается *dy:*

$$dy = f'(x)\Delta x.$$

Учитывая, что приращение независимой переменной равно ее дифференциалу, $\Delta x = dx$, то формулу для дифференциала функции можно записать в виде:

$$dy = f'(x)dx.$$

Применение дифференциала к приближенным вычислениям значений функций основано на замене приращения функции ее дифференциалом:

$$\Delta y \approx dy \Rightarrow f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)dx \Rightarrow f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Пример. Вычислить приближенно $\sqrt[3]{26}$.

Решение. Возьмем функцию $f(x) = \sqrt[3]{x}$. Тогда для малых Δx будем иметь $f(x) \approx f(x_0) + f'(x)\Delta x.$ $x = 26,\ x_0 = 27,\ \Delta x = x - x_0 = 26 - 27 = -1,\ f'(x_0) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x_0}}.$

Будем иметь $\sqrt[3]{26} \approx \sqrt[3]{27} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{27^2}} \cdot (-1) = 3 - \dfrac{1}{27} \approx 2{,}96.$

УПРАЖНЕНИЯ

•*Найти дифференциалы следующих функций:*

1. $y = x^3.$
2. $y = 3\sin x.$
3. $y = 4x^2 + 2.$
4. $y = tg 3x.$
5. $s = a\sin(t+4).$
6. $y = \sqrt[3]{x+1}.$
7. $y = \arcsin\sqrt{x}.$
8. $y = tg x^2.$
9. $y = \cos(x^2 + 3x + 1).$
10. $y = 2^{\arcsin x}.$
11. $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
12. $y = \ln\sin(x+1).$

•*Вычислить приближенно:*

а) $\sqrt[3]{124}$; б) $tg 44^0$; в) $\sqrt[4]{82}$; г) $arctg\, 0{,}98$;

д) $\ln(e+0{,}1)$; е) $y = x^3 + x^2$ при $x = 2{,}01$; ж) $y = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ при $x = 2{,}9$.

2.10 Производные высших порядков

Производную y' от функции *y=f(x)* называют производной первого порядка; производную от производной первого порядка называют второй производной или производной второго порядка от функции *y=f(x)* и обозначают y'' или $f''(x)$, т.е. $y'' = (y')'$ или $f''(x) = (f'(x))'$ и т.д.

Производная от производной (n –1)-го порядка называется производной n-го порядка от функции $y=f(x)$ и обозначается $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$.

Производная второго порядка $\frac{d^2x}{dx^2}$ от функции, заданной параметрически, находится по формуле $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{(y'_x)'_t}{x'_t}=\frac{y''_{tt}x'_t-x''_{tt}y'_t}{(x'_t)^3}$.

УПРАЖНЕНИЯ

∙*Найти производные второго порядка:*

1. $y=\sqrt{x^2+1}$.
2. $y=ctgx$.
3. $y=e^{-x^2}$.
4. $y=\ln(4x+5)$.
5. $y=x^2e^x$.
6. $y=e^{\sin x}$.
7. $y=\frac{x-1}{x+1}$.
8. $y=\frac{1-\cos x}{\sin x}$.

∙*Найти производные указанного порядка от данных функций:*

9. $y=e^{3x+5}$; $y'''(0)=?$
10. $y=\sin x^2$; $y^{(3)}=?$
11. $y=\sin x$; $y^{(n)}=?$
12. $y=e^x\cos x$; $y^{(3)}=?$

∙*Найти производную второго порядка* $\frac{d^2x}{dx^2}$*, от функции, заданной параметрически*:

13. $\begin{cases}x=\ln t,\\ y=arctgt.\end{cases}$
14. $\begin{cases}x=\cos t+\sin t,\\ y=\sin 2t.\end{cases}$
15. $\begin{cases}x=\frac{1}{t^2},\\ y=\frac{1}{t^2+1}.\end{cases}$
16. $\begin{cases}x=arctgt,\\ y=\frac{t^2}{2}.\end{cases}$
17. $\begin{cases}x=\cos t,\\ y=\ln\sin t.\end{cases}$
18. $\begin{cases}x=\sqrt{t-1},\\ y=\frac{t}{\sqrt{t-1}}.\end{cases}$
19. $\begin{cases}x=\sqrt{1-t^2},\\ y=\frac{1}{t}.\end{cases}$
20. $\begin{cases}x=\sqrt{t},\\ y=\sqrt[3]{t-1}.\end{cases}$

3. ПРИЛОЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИЙ

3.1 Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ и $\frac{\infty}{\infty}$

Если функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ удовлетворяют условиям:

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = 0$ *или* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \pm\infty;$

2) в некоторой окрестности точки $x = a$, за исключением, быть может, самой точки, существуют производные $f'(x)$ и $\varphi'(x)$, причем $\varphi'(x) \neq 0;$

3) существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Правило применимо и в том случае, когда $a = \infty$.

Если после применения правила Лопиталя неопределенность сохранилась, то при выполнении ранее указанных условий его можно применить еще раз. Правило Лопиталя становится более эффективным, если оно сочетается с другими приемами раскрытия неопределенностей.

Пример. Найти предел $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)tg\dfrac{\pi x}{4}$.

Решение. Имеем неопределенность вида $0\cdot\infty$. Учитывая, что $tg\dfrac{\pi x}{4} = \dfrac{\sin\frac{\pi x}{4}}{\cos\frac{\pi x}{4}}$, и применив теорему о пределе произведения и частного двух функций, будем иметь:

$$\lim_{x\to 2}(x-2)tg\frac{\pi x}{4} = \lim_{x\to a}\frac{x-2}{\cos\frac{\pi x}{4}}\cdot\lim_{x\to 2}\sin\frac{\pi x}{4} = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\cos\frac{\pi x}{4}}\cdot 1 = \lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\cos\frac{\pi x}{4}}.$$

Имеем неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{\cos\frac{\pi x}{4}} = \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)'}{(\cos\frac{\pi x}{4})'} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{-\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi x}{4}} = \frac{1}{-\frac{\pi}{4}} = -\frac{4}{\pi}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

• *Найти пределы функций:*

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos 2x}{\sin 2x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-1}{1-\cos 4x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1-x}{1-\sin\dfrac{\pi x}{2}}$.

4. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{x}{ctg 2x}-\dfrac{\pi}{4\cos 2x}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{e^x-1}\right)$.

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-5x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^3-3x^2+4}$.

8. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2+2x-3}{x^3+4x^2+3x}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^3-(1+3x)}{x^3+x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4-1}{2x^4-x^2-1}$.

3.2 Возрастание и убывание функции. Экстремум

Функция $y= f(x)$ называется возрастающей (убывающей) на (a,b), если для любых $x_1,x_2\in(a,b)$, $x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)>f(x_1)$ $(x_2>x_1\Rightarrow f(x_2)<f(x_1))$.

Возрастающие и убывающие функции называются монотонными.

Достаточные признаки монотонности функции. Если $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ $\forall\ x\in(a,b)\Rightarrow f(x)$ *возрастает* (*убывает*) на (a,b).

Точка x_0 называется точкой максимума (минимума) функции $y= f(x)$, если функция непрерывна в этой точке и можно указать такую δ-окрестность точки x_0, что для всех $x\neq x_0$, принадлежащих этой окрестности, выполняется неравенство $f(x_0)>f(x)$ $(f(x_0)<f(x))$.

При этом значение $f(x_0)$ называется максимумом (max) (минимумом (min)) функции. Максимум и минимум функции называются экстремумом.

Необходимое условие существования экстремума. Если в точке x_0 функция непрерывна и имеет экстремум, то $f'(x_0)=0$ или производная в этой точке не существует.

Точки, в которых производная равна нулю или не существует, называются критическими точками первого рода.

Достаточный признак существования экстремума. Пусть функция $y=f(x)$ определена и непрерывна в некоторой окрестности точки x_0, включая саму точку, и производная $f'(x_0)$ существует в окрестности этой точки, за исключением, быть может, самой точки x_0.

Тогда, если:

1) $f'(x)>0$ (знак +) при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ (знак -) при $x>x_0$, то функция в точке x_0 достигает максимума;

2) $f'(x)<0$ (знак -) при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ (знак +) при $x>x_0$, то функция в точке x_0 достигает минимума;

3) $f'(x)$ не меняет знак, то экстремума нет.

Пример. Найти интервалы монотонности и экстремумы функции $y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Решение. Область определения – вся числовая ось. *D(f)* = (–∞,∞).

Находим производную *f'(x)*. $f'(x) = \dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$.

Решая уравнение $f'(x) = 0$, находим критические точки первого рода, т.е. точки, в которых производная либо равна нулю, либо не существует.

$\dfrac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2} = 0 \Rightarrow x_1 = -1,\ \ x_2 = 1$ – критические точки первого рода.

x	(-∞,-1)	-1	(-1,1)	1	(1,∞)
y'	-	0	+	0	-
y	↘	min	↗	max	↘

Интервалы (-∞,-1), (1,∞) – интервалы убывания. Интервал (-1,1) – интервал возрастания. В точке *x* = -1 функция имеет минимум, в точке *x* = 1 – максимум. $y_{\min} = -1,\ \ y_{\max} = 1$.

УПРАЖНЕНИЯ

•*Найти интервалы монотонности и экстремумы функций:*

1. $y = 3 + 2x - x^2$.

Отв. A) $(-\infty,1)$ – убывает, $(1,+\infty)$ – возрастает, $y_{\min} = 4$.

B) $(-\infty,-1)$ – возрастает, $(-1,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 4$.

C) $(-\infty,1)$ – возрастает, $(1,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 4$.

D) $(-\infty,2)$ – возрастает, $(2,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 3$.

E) $(-\infty,1)$ – возрастает, $(1,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 2$.

2. $y = 1 - 4x - x^2$.

Отв. A) $(-\infty,-2)$ – убывает, $(-2,+\infty)$ – возрастает, $y_{\min} = 5$.

B) $(-\infty,-1)$ – возрастает, $(-1,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 4$.

C) $(-\infty,2)$ – возрастает, $(2,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 11$.

D) $(-\infty,-2)$ – возрастает, $(-2,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 5$.

E) $(-\infty,1)$ – возрастает, $(1,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 2$.

3. $y = x^3 - 3x^2 + 3x + 2$.

Отв. A) $(-\infty,-2)$ – убывает, $(-2,+\infty)$ – возрастает, $y_{\min} = 5$.

B) $(-\infty,-1)$ – возрастает, $(-1,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 4$.

C) $(-\infty,2)$ – возрастает, $(2,+\infty)$ – убывает, $y_{\max} = 4$.

D) $(-\infty,-2)$ – возрастает, $(-2,+\infty)$ – убывает, $y_{\max}=5.$

E) $(-\infty,+\infty)$ – интервал возрастания, экстремумов нет.

4. $y=(x-3)^2.$ 5. $y=2x^3+3x^2-12x+5.$

6. $y=x^2(x-4).$

Отв. A) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ – убывает, (0,2) – возрастает, $y_{\min x}=0,\ y_{\max}=8.$

B) $(-\infty,-2)\cup(0,+\infty)$ – возрастает, (-2,0) – убывает, $y_{\max}=-24,\ y_{\min}=-8.$

C) $(-\infty,0)\cup(2,+\infty)$ – возрастает, (0,2) – убывает, $y_{\max}=0,\ y_{\min}=-8.$

D) $(-\infty,0)\cup(3,+\infty)$ – возрастает, (0,3) – убывает, $y_{\max}=0,\ y_{\min}=-8.$

E) $(-\infty,1)\cup(2,+\infty)$ – возрастает, (1,2) – убывает, $y_{\max}=-1,\ y_{\min}=-8.$

7. $y=\dfrac{5x}{1+x^2}.$ 8. $y=\dfrac{16}{x(4-x^2)}.$

9. $y=x-\ln(1+x).$ 10. $y=\sqrt[3]{x^2}+\dfrac{2}{3}x.$

11. $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}.$ 12. $y=x^2e^{-x}.$

3.3 Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба

Функция *y= f(x)* называется выпуклой (вогнутой) на интервале *(a,b)*, если на этом интервале она дифференцируема и ее график расположен ниже (выше) касательной, проведенной в любой точке интервала *(a,b)*.

Достаточное условие выпуклости и вогнутости функции. Если *f''(x)*<0 для $x\in(a,b)$, то функция выпукла на интервале *(a,b)*, а если *f''(x)*>0 для $x\in(a,b)$, то функция вогнута на этом интервале.

Точка графика функции $(x_{0,}f(x_0))$, отделяющая выпуклую часть графика функции от вогнутой, называется точкой перегиба.

Необходимое условие существования точки перегиба. Если непрерывная функция *y= f(x)* имеет в точке x_0 перегиб, то $f''(x_0)=0$ или вторая производная в этой точке не существует.

Точки, в которых $f''(x)=0$ или вторая производная в этих точках не существует, называются критическими точками второго рода.

Достаточные условия существования точки перегиба. Если при переходе через критическую точку слева направо вторая производная меняет знак, то имеется перегиб; если перемены знака нет, то перегиба нет.

Пример. Найти интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба функции $y=xe^x$.

Решение. Найдем область определения функции: *D(f)* =(-∞,+∞).

Найдем вторую производную $y'' = e^x(2+x)$. Найдем критические точки второго рода. $y''=0,\ e^x(2+x)=0,\ x_0=-2$ - критическая точка.

x	$(-\infty,-2)$	-2	$(-2,+\infty)$
y''	$-$	0	+
y	выпукла	Пер.	вогнута

$x_{пер.}=-2,\ y_{пер.}=-2e^{-2}$. (-2, -2$e^{-2}$) – точка перегиба.

$(-\infty,-2)$ - интервал выпуклости, $(-2,+\infty)$ - интервал вогнутости.

УПРАЖНЕНИЯ

•*Найти интервалы выпуклости и вогнутости и точки перегиба графиков функции:*

1. $y=\ln(1+x^2)$.
2. $y=x^3-6x^2+12x+4$.
3. $y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$.
4. $y=\dfrac{2x^3}{12+x^2}$.
5. $y=(1+x^2)e^x$.
6. $y=arctgx-x$.
7. $y=2x^2+\ln x$.
8. $y=xarctgx$.

3.4 Асимптоты графика функции

При исследовании функции необходимо установить ее поведение при удалении текущей точки графика функции от начала координат. В некоторых случаях это можно сделать с помощью прямой, к которой неограниченно приближается текущая точка графика функции при удалении ее от начала координат.

Асимптотой графика функции *y = f(x)* называется прямая, расстояние от которой до текущей точки графика функции стремится к нулю при неограниченном удалении ее от начала координат.

Различают вертикальные, горизонтальные и наклонные асимптоты. Пусть *M(x,y)* – текущая точка графика функции. Точка *M (x,y)* может удаляться от начала координат следующим образом:

1) $x\to a,\ y\to\infty$; 2) $x\to\infty,\ y\to b$; 3) $x\to\infty,\ y\to\infty$.

В первом случае имеем $\lim\limits_{x\to a} y=\infty$, и прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой.

Во втором случае $\lim\limits_{x\to\infty} y=b$ и прямая $y = b$ будет горизонтальной асимптотой.

В третьем случае график функции $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту, уравнение которой имеет вид $y = kx + b$.

Необходимое и достаточное условие существование невертикальных асимптот устанавливается с помощью теоремы.

Теорема. Для того чтобы прямая $y = kx + b$ была асимптотой графика функции $y = f(x)$, необходимо и достаточно существование пределов

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx].$$

Если не существует хотя бы один из пределов, то невертикальных асимптот нет.

Пример. Найти асимптоты графика функции $y = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

Решение. Точки $x = 1$ и $x = -1$ являются точками разрыва второго рода данной функции. Так как $\lim\limits_{x\to -1-0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to 1=0} \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}} = +\infty$, то прямые $x - -1,\ x = 1$ являются вертикальными асимптотами.

Найдем невертикальные асимптоты. При $x \to +\infty$ получаем

$$k_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = 1,\ b_1 = \lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Следовательно, правой асимптотой является прямая $y = x$.

Аналогично, при $x \to -\infty$ имеем

$$k_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2}{x\sqrt{x^2-1}} = -1,\ b_2 = \lim_{x\to-\infty} [f(x) - x] = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^2 - x\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2-1}} = 0.$$

Левой асимптотой графика функции является прямая $y = -x$.

УПРАЖНЕНИЯ

• *Найти асимптоты графика функции:*

1. $y = \frac{3x}{x-1}$.
2. $y = \frac{x}{2x-1} + x$.
3. $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 4}$.
4. $y = x - 2 + \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$.
5. $y = e^{-x^2} + 3$.
6. $y = -2arctgx$.
7. $y = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 4}$.
8. $y = \frac{2}{1 - e^x}$.
9. $y = \frac{\ln x}{x}$.
10. $y = \frac{x^3 + 2x + 1}{x^2 - 4}$.

3.5 Общая схема исследования функции и построение ее графика

Исследование функции и построение графика удобно проводить по следующей схеме:

1.Найти область определения функции и точки разрыва.

2.Исследовать поведение функции на границе области определения.

3.Найти асимптоты графика функции.

4.Найти точки пересечения графика функции с осями координат.

5.Исследовать функцию на четность, нечетность и периодичность.

6.Исследовать функцию на экстремум. Найти интервалы монотонности.

7.Найти точки перегиба функции и интервалы выпуклости и вогнутости.

8.Используя результаты исследования, построить график функции.

Пример. Исследовать функцию $y = \dfrac{\ln x}{x}$ и построить ее график.

Решение. 1) Функция определена при $x > 0$. $(0,+\infty)$ – область определения.

2) Исследуем поведение функции на границе области определения. Найдем граничные значения:

$$\lim_{x\to+0}\frac{\ln x}{x} = -\infty. \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

3) Из предыдущего пункта следует, что прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой, а прямая $y = 0$ – горизонтальной асимптотой. Будем находить невертикальные асимптоты $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^2} = \left|\frac{\infty}{\infty}\right| = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{2x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - kx] = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1/x}{1} = 0.$$

Так как $k = b = 0$, то наклонной асимптоты нет; прямая $y = 0$ – горизонтальная асимптота.

4) Найдем точку пересечения с осью Оx. Если $y = 0$, то $\dfrac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow x - 1.$

Точка $P(1;0)$ есть точка пересечения графика функции с осью Оx.

5) Функция $y = \dfrac{\ln x}{x}$ будет функцией общего вида, так как область определения функции не является симметричной относительно начала координат, и поэтому не выполняются условия четности и нечетности функции. Функция непериодическая.

6) Для нахождения интервалов монотонности и экстремумов функции найдем критические точки. Для этого найдем первую производную $y' = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.

Решив уравнение $\frac{1-\ln x}{x^2}=0,$ найдем критические точки, подозрительные на экстремум. $\frac{1-\ln x}{x^2}=0 \Rightarrow 1-\ln x=0 \Rightarrow \ln x=1 \Rightarrow x=e$ - критическая точка.

Исследуем знак первой производной при переходе через критическую точку в сторону возрастания *x*. Результаты исследования представим в виде таблицы.

x	$(0,e)$	e	(e,∞)
Y'	+	0	-
y	$\nearrow$ возрастает	max	$\searrow$ убывает

$x_{\max}=e,\ y_{\max}=\frac{1}{e},\quad P(e;\frac{1}{e}),\quad (0,e)$ - интервал возрастания, $(e;+\infty)$ – интервал убывания.

7) Для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости и исследования на перегиб найдем вторую производную: $y''=\frac{2\ln x-3}{x^3}.$

Решив уравнение $\frac{2\ln x-3}{x^3}=0,$ найдем критические точки второго рода.

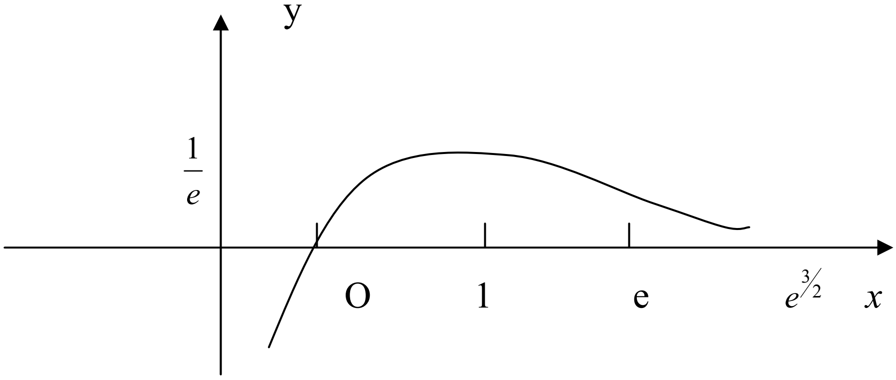
$\frac{2\ln x-3}{x^3}=0 \Rightarrow 2\ln x-3=0 \Rightarrow \ln x=\frac{3}{2} \Rightarrow x=e^{\frac{3}{2}}$ – критическая точка второго рода.

Исследуем знак второй производной при переходе через критическую точку в сторону возрастания *x*. Результаты исследования представим в виде таблицы:

x	$(0,e^{3/2})$	$e^{3/2}$	$(e^{3/2},+\infty)$
Y''	$y''<0$	0	$y''>0$
y	выпуклый	Перегиб	вогнутый

$x_{пер}=e^{3/2},\ y_{пер}=\frac{3}{2e^{3/2}},\ \left(e^{3/2},\frac{3}{2e^{3/2}}\right)$ – точка перегиба графика функции.

8) Используя результаты исследования, строим график функции



УПРАЖНЕНИЯ

• *Исследовать функцию и построить ее график:*

1. $y = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

2. $y = \dfrac{x}{1+x^2}$.

3. $y = \dfrac{1-x^3}{x^2}$.

4. $y = \dfrac{x^2-x-6}{x-2}$.

5. $y = \left(\dfrac{x+1}{1-x}\right)^4$.

6. $y = \dfrac{x^3}{x^2-4}$.

7. $y = \dfrac{4-x^3}{x^2}$.

8. $y = \dfrac{x^3-4}{x^2}$.

9. $y = \dfrac{2(1-x)^3}{x^2}$.

10. $y = \dfrac{x^3+2x^2+4x+2}{2(x-2)^2}$.

11. $y = \dfrac{x-2}{1-(x-2)^2}$.

12. $y = \dfrac{1+\ln x}{x}$.

13. $y = \dfrac{x^3}{1-x^2}$.

14. $y = x - arctg\,2x$.

15. $y = \dfrac{4}{1+x^2}$.

16. $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

4. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

4.1 Основные понятия и определения

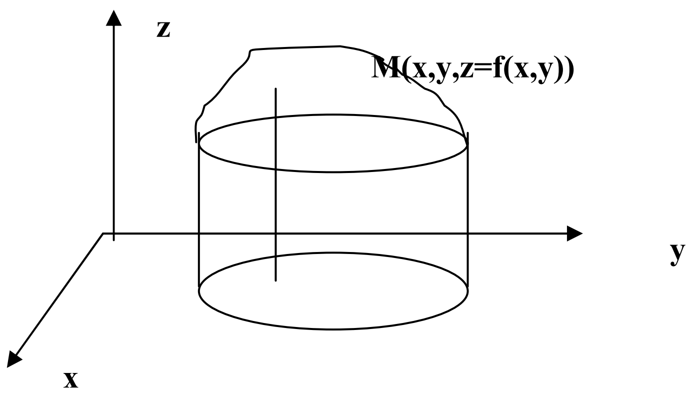
Если каждой паре (x, y) значений двух, независимых друг от друга, переменных величин, принадлежащих области их изменения D, соответствует единственное определенное значение величины z, то z называется однозначной функцией двух переменных x и y, определенной в области *D*. Переменные x и y называются аргументами или независимыми переменными. Символически функция двух переменных обозначается так:

$$z = f(x,y),\ \text{или}\ z = F(x,y)\ \text{и т.д.}$$

Аналогично определяется функция трех и большего числа аргументов.

Область определения функции. Совокупность пар значений $(x,y) \in D \subset Oxy$, для которых определяется функция $z = f(x,y)$, называется областью определения или областью существования этой функции.

Значение функции $z = f(x,y)$ в точке *P(a,b)*, т.е. при $x = a,\ y = b$, обозначается $f(a,b)$ или $f(P)$. Геометрическим изображением функции $z = f(x,y)$ в прямоугольной системе координат *Oxy*, вообще говоря, является некоторая поверхность.



Пример. Найти область определения для функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

Решение. Областью определения данной функции является круг вместе с границей радиуса 1 с центром в начале координат:

$$1 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 1.$$

Линии и поверхности уровня функции. Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется такая линия $f(x,y) = C$ на плоскости *Oxy*, в точках которой функция принимает одно и тоже значение *z* =*C*.

Поверхностью уровня функции трех переменных $u = u(x,y,z)$ называется такая поверхность $u(x,y,z) = C$, в точках которой функция принимает постоянное значение $u = C$.

Пример. Определить поверхности уровня функции $u = x^2 + y^2 - z$.

Решение. Поверхности уровня этой функции определяются уравнением $x\ \ + y^2 - z = C.$

Это уравнение есть семейство параболоидов вращения, осью которых служит ось Oz (рис.1).

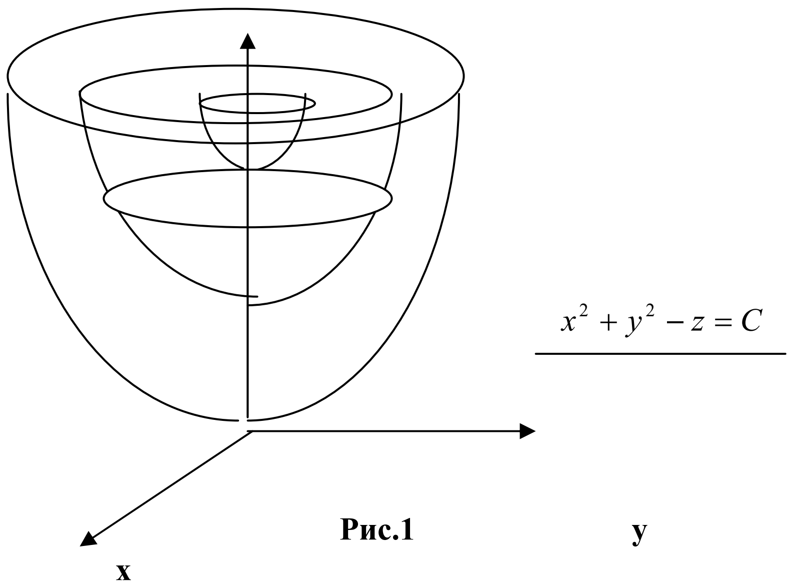


Рис.1

Поверхности уровня могут вырождаться в линии и точки. Для функции двух переменных $z = f(x,y)$ уравнение $f(x,y)=C$ определяет линии уровня.

УПРАЖНЕНИЯ

• *Какие поверхности изображают следующие уравнения:*

1. $x + y + z - 2 = 0$.
2. $2x + 3y + 4z - 12 = 0$.
3. $2x - z + 6 = 0$.
4. $x + y = 0$.
5. $3x + 4 = 0$.
6. $z - 5 = 0$.
7. $x^2 + y^2 = 4$.
8. $x^2 + z^2 = 4$.
9. $x^2 + y^2 = 4x$.
10. $x^2 + y^2 = 4y$.
11. $z = x^2 - 2$.
12. $y = 2 - x^2$.
13. $z = y^2$.
14. $y = z^2$.
15. $z = x^2 + y^2$.
16. $z = \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4}$.

• *Найти области определения следующих функций:*

17. $z = \sqrt{2x - y}$.
18. $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$.
19. $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 - y}}$.
20. $z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{1 - y^2}$.
21. $z = \ln(x + y)$.
22 $z = \sqrt{2xy}$.
23. $z = \arcsin(x - y)$.
24. $z = \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$.
25. $z = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$.
26. $z = \ln(x^2 + y^2 - 4)$.

•*Найти линии уровня следующих функций:*

27. $z = 3x - y$. 28. $z = x^2 - y^2$.

29. $z = \ln\sqrt{\dfrac{y}{2x}}$. 30. $z = x^2 - 4x + y^2$.

31. $z = 2x^2 + 9y^2$. 32. $z = y^2 + x$.

33. $z = \sin x - y$. 34. $z = xy$.

35. $z = \ln(x^2 + y)$. 36. $z = \sqrt{x} - y$.

•*Найти поверхности уровня функций трех независимых переменных:*

37. $u = x^2 + y^2 + z^2$. 38. $u = 16x^2 + 9y^2 + 4z^2$.

39. $u = x^2 + y^2 - z$. 40. $u = 2y^2 + 9z^2$.

41. $u = z^2 - y$. 42. $u = x^2 + y^2$.

43. $u = x + 3$. 44. $u = x + y + z$.

4.2 Предел и непрерывность функции двух переменных

Предел функции. Число A называется пределом функции $z=f(x,y)$ при стремлении точки $P(x,y)$ к точке $P_0(a,b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при всех d, $0 < d < \delta$, где $d = |P_0P| = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}$ – расстояние между точками P_0 и P, имеет место неравенство

$$|f(x,y) - A| < \varepsilon .$$

В этом случае пишут:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\to b}} f(x,y) = A \text{ или } \lim_{P\to P_0} f(P) = A .$$

Непрерывность и точки разрыва. Функция $z=f(x,y)$ непрерывная в точке $P_0(a,b)$, если

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\to b}} f(x,y) = f(a,b) .$$

Функция, непрерывная во всех точках области, называется непрерывной в этой области.

Нарушение условий непрерывности для функции $f(x,y)$ может происходить как в отдельных точках (изолированная точка разрыва), так и в точках, образующих одну или несколько линий (линии разрыва).

Пример. Найти точки разрыва функции $z = \dfrac{x+y}{x-y}$.

Решение. Функция определена во всех точках (x,y), у которых $x \neq y$. На прямой $y = x$ функция не определена и поэтому эта прямая состоит из точек разрыва.

Свойства непрерывных функций. Если функция $f(x,y)$ непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она: 1) достигает в этой области своего наибольшего и наименьшего значений; 2) ограничена в этой области; 3) принимает все свои промежуточные значения.

4.3 Частные производные

Если $z=f(x,y)$, то, полагая y постоянной, получаем производную

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = f'_x(x,y),$$

которая называется частной производной функции z по переменной x.

Аналогично определяется и обозначается частная производная функции z по переменной y, при этом переменная x считается постоянной. Для нахождения частных производных применяются обычные формулы и правила дифференцирования.

Пример. Найти частные производные функции $z = \ln\sin\frac{x}{y}$.

Решение. Рассматривая y как постоянную величину, получим:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{\sin\frac{x}{y}} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y} \cdot ctg\frac{x}{y}.$$

Аналогично, рассматривая x как постоянную, будем иметь:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{\sin\frac{x}{y}} \cdot \cos\frac{x}{y} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2} \cdot ctg\frac{x}{y}.$$

4.4 Частные производные высших порядков

Частными производными второго порядка функции $z = f(x,y)$ называются частные производные от ее частных производных первого порядка.

Для производных второго порядка употребляются обозначения:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y), \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y), \quad \frac{\partial}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y).$$

Аналогично определяются и обозначаются частные производные порядков выше второго.

Если частные производные, подлежащие нахождению, непрерывны, то результат многократного дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования. В частности

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

• *Найти частные производные следующих функций:*

1. $z = x^3 + 3xy^2 - y^3$.
2. $z = 3x^2 y + \sin xy - y^2$.
3. $z = \dfrac{xy}{x+y}$.
4. $z = arctg\dfrac{y}{x}$.
5. $z = x^2 y + x^3 y$.
6. $z = x^y$.
7. $z = \sqrt{x^2 - y^2}$.
8. $z = e^{\sin\frac{x}{y}}$.
9. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
10. $u = z^{xy}$.
11. $z = \ln(x + \ln y)$.
12. $z = xe^{-xy}$.

13. Дана функция $z = e^{xy}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

14. Дана функция $z = \ln(x^2 + y^2 + 2y + 1)$. Показать, что

$$\frac{\partial^{2z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

15. Дана функция $\sin^2(y - 2x)$. Показать, что

$$4\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}.$$

16. Дана функция $z = \sqrt{\dfrac{x}{y}}$. Показать, что

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y}\left(y^2\frac{\partial z}{\partial y}\right) = 0.$$

17. Дана функция $z = \dfrac{\sin(x-y)}{x}$. Показать, что

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial z}{\partial x}\right) - x^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

18. Показать, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}$, если

$$z = \arcsin\sqrt{\frac{x-y}{x}}.$$

19. Найти $\dfrac{\partial^2 r}{\partial x^2}$, если

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

20. Найти все частные производные второго порядка функции

$$u = xy + yz + zx.$$

4.5 Полный дифференциал функции

Полным дифференциалом функции двух переменных *z=f(x,y)* называется главная часть полного приращения функции, линейная относительно приращений независимых переменных. Формула для вычисления полного дифференциала функции *z=f(x,y)* имеет вид:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy.$$

Пример. Найти дифференциал функции $z = x^2y^3$.

Решение. Находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = (x^2y^3)'_x = 2xy^3, \ \frac{\partial z}{\partial y} = 3x^2y^2.$$

Находим дифференциал:

$$dz = 2xy^3dx + 3x^2y^2dy.$$

4.6 Производная по направлению

Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в окрестности точки $M(x;y)$; $\bar{l} = \{\cos\alpha;\cos\beta\}$ – единичный вектор; L – направленная прямая, проходящая через точку *M(x;y)*, для которой вектор $\bar{l}$ является направляющим вектором; точка $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ принадлежит прямой L; Δl – величина отрезка MM_1; $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$ – приращение функции $z = f(x,y)$ в точке *M(x;y)* по направлению вектора $\bar{l}$.

Производной функции $z = f(x,y)$ в данном направлении $\bar{l}$ называется предел отношения $\frac{\Delta z}{\Delta l}$ при $\Delta l \to 0$ $(M_1 \to M)$. Производная по направлению вектора $\bar{l}$ обозначается $\frac{\partial z}{\partial l}$. Тогда $\frac{\partial z}{\partial l} = \lim\limits_{\Delta l \to 0} \frac{f(M_1) - f(M)}{\Delta l}$.

Если функция $z = f(x,y)$ дифференцируема, то для нахождения производной по направлению справедлива формула

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta,$$

где α *и* β - углы, образованные вектором $\bar{l}$ с осями Оx и Оy .

Аналогично определяется производная в данном направлении $\bar{l}$ для функции трех аргументов $u = u(x,y,z)$. В этом случае

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

где α, β, γ – углы между направлением вектора $\bar{l}$ и соответствующими координатными осями. Производная в данном направлении характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Пример. Найти производную функции $z = \ln(x^2 + 4y^2)$ в точке $A(1;1)$ по направлению вектора $\bar{l} = 5\bar{i} + 3\bar{j}$.

Решение. Найдем значения частных производных в точке $A(1;1)$:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left.\frac{2x}{x^2+y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{2}{5}, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \left.\frac{8y}{x^2+y^2}\right|_{\substack{x=1\\y=1}} = \frac{8}{5}.$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\bar{l}$, в направлении которого определяется производная:

$$\cos\alpha = \frac{X}{|\bar{l}|} = \frac{5}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{5}{\sqrt{34}}, \quad \cos\beta = \frac{Y}{|\bar{l}|} = \frac{3}{\sqrt{5^2+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{34}}.$$

Теперь найдем производную по направлению:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = \frac{2}{5}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} + \frac{8}{5}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{\sqrt{34}}{5}.$$

4.7 Градиент функции

Градиентом функции $z = f(x,y)$ называется вектор, проекциями которого на координатные оси являются соответствующие частные производные данной функции:

$$grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j}.$$

Производная данной функции в направлении $\bar{l}$ связана с градиентом функции следующей формулой:

$$\frac{\partial z}{\partial l} = np_l grad\ z,$$

т.е. производная в данном направлении равна проекции градиента функции на направление дифференцирования.

Градиент функции в каждой точке направлен по нормали к соответствующей линии уровня функции. Направление градиента функции в данной точке есть направление наибольшей скорости возрастания функции в этой точке, т.е. при $\bar{l} = grad\ z$ производная $\frac{\partial z}{\partial l}$ принимает наибольшее значение, равное модулю градиента:

$$|\,grad\ z\,| = \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}.$$

Аналогично определяется градиент функции трех переменных $u = u(x,y,z)$:

$$grad\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\bar{k}.$$

Градиент функции трех переменных в каждой точке направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

Пример. Найти градиент функции $z = x^3 + 2y^2 - 5y$ в точке М(2;-1).

Решение. Находим частные производные и их значения в точке М(2;-1):

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x=2\\ y=-1}} = 2x\Big|_{\substack{x=2\\ y=-1}} = 4, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x=1\\ y=-1}} = 4y-5\Big|_{\substack{x-2\\ y=-1}} = -9.$$

Найдем градиент данной функции в точке М(2;-1):

$$grad\ z = 4\bar{i} - 9\bar{j}.$$

УПРАЖНЕНИЯ

•*Найти полные дифференциалы следующих функций:*

1. $z = 2x^3 + 3y^2 - 4xy$.
2. $z = 2\sin 3x + 3\cos 2y + xy$.
3. $z = \sqrt{2x + 3y^2}$.
4. $z = \sin^2 x + \cos^2 y$.
5. $z = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
6. $z = ctg\dfrac{y}{x}$.
7. $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.
8. $u = xyz$.
9. Найти $du(3,4,5)$, если $u(x,y,z) = \dfrac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.
10. $z = \ln tg\dfrac{x+y}{x-y}$.
11. $z = arctg\dfrac{x}{\sqrt{y}}$.
12. Найти производную функции $z = x^2 - 2xy^2 - 2y^2$ в точке $P(1;2)$ в направлении, составляющим с осью Ox угол в 60°.
13. Найти производную функции $z = 3x^2 - xy - 2y^2$ в точке $M(1;2)$ по направлению вектора $\overline{MN}$, где N - точка с координатами (4;6).
14. Найти производную функции $z = 3x^2 - xyz + y^2$ в точке $M(1;2;-1)$ по направлению вектора $\overline{MN}$, где N - точка с координатами (24;-1).
15. Найти производную функции $u = \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} - z^2$ в точке М(2;3;1), если направление дифференцирования совпадает: 1) с направлением радиус-вектора этой точки; 2) с направлением вектора $\bar{a} = 4\bar{i} + 3\bar{j}$.
16. Найти производную функции $z = \arcsin\dfrac{x^2}{y}$ в точке М(1;2), если направление дифференцирования совпадает с направлением вектора $\bar{a} = 5\bar{i} - 12\bar{j}$.

•*В следующих задачах даны:* функция $z = f(x,y)$, точка A и вектор $\bar{a}$. Требуется найти $grad\ z$ и $|\,grad\ z\,|$.

17. $z = xe^y$, A(2;0), $\bar{a} = 5\bar{i} + 12\bar{j}$.
18. $z = x^2 + y^2 + 2xy^2$, A(3;1), $\bar{a} = -\bar{i} + \bar{j}$.

19. $z = \arcsin\frac{x}{y}$, A(3;5), $\overline{a} = \overline{i} - \overline{j}$.

20. $z = arctg\frac{x}{y}$, A(2;-2), $\overline{a} = -\overline{i} - 2\overline{j}$.

21. $z = \ln(x^2 + 3y^2)$, A(1;1), $\overline{a} = 3\overline{i} + 2\overline{j}$.

4.8 Дифференцирование неявной функции

Производная неявной функции *y=f(x)*, задаваемой с помощью уравнения *F(x,y)=0*, где *F(x,y)* – дифференцируемая функция переменных *x* и *y*, может быть найдена по формуле:

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}$$

при условии, что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Аналогично, частные производные неявной функции двух переменных $z = f(x, y)$, заданной с помощью уравнения *F(x,y,z)=0*, где *F(x,y,z)* – дифференцируемая функция переменных *x*, *y* и *z* могут быть найдены по формулам:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}$$

при условии, что $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$.

Пример. Найти производную $\frac{dy}{dx}$ неявно заданной функции $arctg(x + y) = x$.

Решение. Данное выражение запишем в виде $arctg(x + y) - x = 0$. Тогда $F(x, y) = arctg(x + y) - x$. Найдем частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \left(arctg(x + y) - x\right)'_x = \frac{1}{1 + (x + y)^2} - 1 = \frac{-(x + y)^2}{1 + (x + y)^2},$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \left(arctg(x + y) - x\right)'_y = \frac{1}{1 + (x + y)^2}.$$

Производная функции *y=f(x)*, заданной неявно, будет:

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}=-\frac{\frac{-(x+y)^2}{1+(x+y)^2}}{\frac{1}{1+(x+y)^2}}=\frac{(x+y)^2\left(1+(x+y)^2\right)}{1+(x+y)^2}=(x+y)^2.$$

УПРАЖНЕНИЯ

• *Найти производную функции, заданной неявно:*

1. $x^2+y^2+\ln(x+y)=a^2.$
2. $x+y-e^{x+y}.$
3. $\sin(x+y)+\cos xy=0.$
4. $2x^2+3y^2+5x+4y-8=0.$
5. $2x^2+3y^2+(x+y)^2=a^2.$
6. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1,\quad y'_x(1;1)-?$
7. $z=xy^2.$
8. $y=y^3+xy.$

4.9 Экстремум функции двух переменных

Функция *z=f(x,y)* имеет максимум (минимум) в точке $M_0(x_0;y_0)$, если найдется такое число $\delta>0$, что для всех точек *M(x;y)*, $M\neq M_0$, удовлетворяющих условию $|M_0M|<\delta$ будет выполняться неравенство $f(x_0,y_0)>f(x,y)$ ($f(x_0,y_0)<f(x,y)$), т.е. значение функции в точке M_0 будет наибольшим (наименьшим) по сравнению со значениями функции в любой другой точке М, принадлежащей некоторой окрестности точки M_0. Максимум или минимум функции называются ее экстремумом. Точка M_0, в которой функция имеет экстремум, называется точкой экстремума.

Необходимое условие экстремума. Если дифференцируемая функция *z=f(x;y)* имеет экстремум в точке $M_0(x_0;y_0)$, то ее частные производные первого порядка равны нулю в этой точке, т.е.

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}=0,\quad \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}=0.$$

Точки, в которых частные производные равны нулю, называются стационарными точками. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума. Пусть $M_0(x_0;y_0)$ - стационарная точка функции *z=f(x,y)*. Обозначим:

$$A=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2},\quad B=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x\partial y},\quad C=\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2}$$

и составим дискриминант $\Delta=AC-B^2$. Тогда:

1) если $\Delta>0$, то функция имеет в точке M_0 экстремум, максимум при A< 0 (или C<0) и минимум при A> 0 (или C>0);

2) если $\Delta<0$, то в точке M_0 экстремума нет;

3) если $\Delta = 0$, то требуется дальнейшее исследование с применением производных более высокого порядка.

Пример. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 6xy$.

Решение. Найдем частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 6y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 6x .$$

Приравняв производные нулю, получим систему уравнений. Решая систему уравнений, найдем стационарные точки:

$$\begin{cases} 3x^2 - 6y = 0 \\ 3y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 - 2y = 0 \\ y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \; y = 0 \\ x = 2, \; y = 2 \end{array}\right)$$

Имеем две стационарные точки $P_1(0;0)$ и $P_1(2;2)$.

Найдем частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial\ z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -6, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Составим дискриминант $\Delta = AC - B^2$ для каждой стационарной точки.

Для точки $P_1(0;0)$

$$A = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2} = 0, \quad B = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = -6, \quad C = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2} = 0, \quad \Delta = -36 < 0.$$

Следовательно, в точке P_1 экстремума нет.

Для точки $P_2(2;2)$

$$A = \frac{\partial^2 z(2,2)}{\partial x^2} = 12, \quad B = \frac{\partial^2 z(2,2)}{\partial x \partial y} = -6, \quad C = \frac{\partial^2 z(2,2)}{\partial y^2} = 12, \quad \Delta = 144 - 36 > 0.$$

Следовательно, в точке P_2 есть экстремум.

Так как A>0, то это минимум:

$$z_{\min} = z(2,2) = 2^3 + 2^3 - 6 \cdot 2 \cdot 2 = -8.$$

УПРАЖНЕНИЯ

• *Найти экстремумы функций двух переменных:*

1. $z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6y$.
2. $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.
3. $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$.
4. $z = xy^2(1 - x - y)$.
5. $z = 1 - x + 2y - 6x^2 - y^2$.
6. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$.
7. $z = e^{-(x^2 + y^2)}$.
8. $z = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$.

5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

5.1 Определение первообразной и неопределенного интеграла

Функция *F(x)* называется первообразной для функции *f(x)* на интервале *(a,b),* если $F'(x) = f(x)\ \forall x \in (a,b)$.

Если *F(x)* – первообразная для функции *f(x)* на *(a,b)*, то функция *F(x) + C*, где С – произвольная постоянная, также является первообразной для функции *f(x)*.

Множество всех первообразных *F(x) + C* называется неопределенным интегралом от функции *f(x)* и обозначается символом $\int f(x)dx$.

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

В этом обозначении знак $\int$ называется знаком интеграла, *x* - переменная интегрирования, выражение *f(x)dx* - подынтегральным выражением, а сама функция *f(x)* – подынтегральной функцией. Операция нахождения первообразной называется интегрированием.

5. 2 Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$
3. $\int dF(x) = F(x) + C.$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx.$
5. $\int \left(f_1(x) \pm f_2(x)\right)dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C.$

В частности, $\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}F(kx+b) + C.$

5.3 Таблица основных неопределенных интегралов

1	$\int 0dx = C.$	2	$\int 1dx = x + C.$
3	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,\ \ \alpha \neq -1.$	4	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C.$
5	$\int \sin x dx = -\cos x + C.$	6	$\int \cos x dx = \sin x + C.$
7	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$	8	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$
9	$\int tgxdx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C.$	10	$\int ctgxdx = \ln\lvert\sin x\rvert + C.$
11	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$	12	$\int e^x dx = e^x + C.$

13	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$	14	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctgx + C \\ -arcctgx + C \end{cases}$
15	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \begin{cases} \arcsin \frac{x}{a} + C \\ -\arccos \frac{x}{a} + C \end{cases}$	16	$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \begin{cases} \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C \\ -\frac{1}{a} arcctg \frac{x}{a} + C \end{cases}$
17	$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left\|\frac{a+x}{a-x}\right\| + C.$	18	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} + C.$

5.4 Непосредственное интегрирование

Нахождение неопределенных интегралов с помощью таблицы, основных свойств неопределенных интегралов и тождественных преобразований подынтегральных функций называется непосредственным интегрированием.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x\sqrt{x}}dx.$

Решение. Выражение в числителе возведем в квадрат и разделим полученное выражение на знаменатель. Применяя таблицу интегралов и их свойства, будем иметь:

$$\int \frac{(\sqrt{x}+2)^2}{x\sqrt{x}}dx = \int \frac{x+4\sqrt{x}+4}{x\sqrt{x}}dx = \int\left(\frac{x}{x\sqrt{x}} + \frac{4\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} + \frac{4}{x\sqrt{x}}\right)dx = \int x^{-1/2}dx + 4\int\frac{dx}{x} + 4\int x^{-3/2}dx =$$

$$= \frac{x^{1/2}}{1/2} + 4\ln|x| + 4\frac{x^{-1/2}}{-1/2} + C = 2\sqrt{x} + 4\ln|x| - \frac{8}{\sqrt{x}} + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\int (3\sqrt[3]{x} - \sqrt{6x} + 1)dx.$
2. $\int \frac{x^3+4x+7}{x^2+4}dx.$
3. $\int (\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}})dx.$
4. $\int \frac{x^3+7}{x^2-1}dx.$
5. $\int \frac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}dx.$
6. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{x\sqrt{x}}{3}\right)dx.$
7. $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx.$
8. $\int e^x\left(1 + \frac{e^{-x}}{x^2}\right)dx.$
9. $\int (3+2x)^2 dx.$
10. $\int 2^x 3^x dx.$
11. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-x^2}} - \frac{3}{9+x^2}\right)dx.$
12. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{x^2-9}} - \frac{3}{9-x^2}\right)dx.$
13. $\int \frac{\cos^3 x + 3\cos^2 x - 2}{\cos^2 x}dx.$
14. $\int \left(\frac{2}{\sqrt{9-3x^2}} - \frac{3}{4x^2+1}\right)dx.$

15. $\int tg^2 x dx.$

16. $\int ctg^2 x dx.$

17. $\int \frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}} dx.$

18. $\int \frac{(1+x)^2}{x(1+x^2)} dx.$

19. $\int \frac{2dx}{\sin^2 x \cos^2 x}.$

20. $\int \frac{x^2-4}{x+4} dx.$

5.5 Метод замены переменной (метод подстановки)

Если неопределенный интеграл непосредственно не берется, то во многих случаях замена переменной интегрирования приводит к более простому интегралу.

Пусть функция $x=\varphi(t)$ определена и дифференцируема на сегменте $[\alpha,\beta]$, а множество ее значений принадлежит сегменту $[a,b]$. Пусть функция *y =f(x)* определена на $[a,b]$ и имеет на этом сегменте первообразную *F(x)*. Тогда имеет место формула

$$\int f(x)dx = \begin{vmatrix} x=\varphi(t), \\ dx=\varphi'(t)dt \end{vmatrix} = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Полученная формула называется формулой замены переменной в неопределенном интеграле.

После интегрирования нового интеграла полученная функция является функцией переменной *t*. Для возвращения к переменной *x* необходимо заменить *t* значением $t=\phi(x)$, которое находится из соотношения $x=\varphi(t)$.

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}}$.

Решение. $\int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)^3}} = \begin{vmatrix} x=\sin t \\ dx=\cos t dt \end{vmatrix} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = tgt + C, \quad где \quad t=\arcsin x.$

Частным случаем метода замены переменной интегрирования является метод подведения под знак дифференциала. Пусть требуется найти интеграл $\int f(x)dx$.

Предположим, что существуют дифференцируемые функция $u=\varphi(x)$ и функция $g(u)$ такие, что подынтегральное выражение $f(x)dx$ может быть представлено в виде

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(u)du$$

(указанное преобразование называется подведением $u=\varphi(x)$ под знак дифференциала). Тогда

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int g(u)du\Big|_{u=\varphi(x)},$$

т.е. нахождение интеграла $\int f(x)dx$ сводится к нахождению интеграла $\int g(u)du$ (который может оказаться проще данного) и последующей подстановке $u=\varphi(x)$.

Полезно запомнить частный случай

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx = \int \frac{df(x)}{f(x)} = \ln|f(x)| + C.$$

Интеграл дроби, числитель которой есть дифференциал знаменателя, равен натуральному логарифму модуля знаменателя.

Особенно широко применяется метод введения под знак дифференциала в том случае, когда аргументом подынтегральной функции является линейная функция от переменной интегрирования:

$$\int f(kx+b)dx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)kdx = \frac{1}{k}\int f(kx+b)d(kx+b) = \frac{1}{k}F(kx+b)+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int 2^{\sin x}\cos xdx.$

Решение.

$$\int 2^{\sin x}\cos xdx = \left|\cos xdx = d(\sin x)\right| = \int 2^{\sin x}d(\sin x) = \left|\begin{array}{l}\text{формула}\\ \int 2^u du = \dfrac{2^u}{\ln 2}+C\end{array}\right| = \frac{2^{\sin x}}{\ln 2}+C.$$

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{5x+3}.$

Решение.

$$\int \frac{dx}{5x+3} = \frac{1}{5}\int\frac{5dx}{5x+3} = \frac{1}{5}\int\frac{d(5x+3)}{5x+3} = \left|\begin{array}{l}\text{формула}\\ \int \dfrac{du}{u} = \ln|u|+C\end{array}\right| = \frac{1}{5}\ln|5x+3|+C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\int \cos 6xdx.$
2. $\int \cos(5-3x0dx.$
3. $\int \sin\frac{3}{4}xdxdx.$
4. $\int \sin\frac{x}{4}dxdx.$
5. $\int \sqrt{7x-3}dx$.
6. $\int \frac{dx}{(2x-6)^5}.$
7. $\int \frac{dx}{5x-6}.$
8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2-3x)^5}}.$
9. $\int e^{3x-4}dx.$
10. $\int e^{\cos x}\sin xdx.$
11. $\int e^{\cos x}\sin xdx.$
12. $\int e^{x^2}xdx.$
13. $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}.$
14. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$.

15. $\int \frac{xdx}{3x^2-5}$.

16. $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+4}}$.

17. $\int x\sqrt{2x^2+1}dx$.

18. $\int x(3x^2+5)^7 dx$.

19. $\int \frac{\sqrt{tgx}}{\cos^2 x}dx$.

20. $\int \frac{dx}{x(1+\ln x)}$.

21. $\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$.

22. $\int \frac{x^3-1}{x^4-4x+1}dx$.

23. $\int \frac{1-\sin x}{x+\cos x}dx$.

24. $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$.

25. $\int \frac{\arcsin x+x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

26. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^4}}$.

27. $\int \frac{2x+3}{x^2+3x+7}dx$.

28. $\int \frac{xdx}{x^2-3x+1}$.

29. $\int \frac{(x+2)dx}{x^2+4x+10}$.

30. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+2x+3}}$.

31. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

32. $\int \frac{dx}{3-2x-x^2}$.

33. $\int x^3(1-3x^2)^7 dx$.

34. $\int \frac{x^5dx}{\sqrt{1-x^2}.}$

35. $\int \cos^5 x\sqrt{\sin x}dx$.

36. $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$.

37. $\int \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$.

38. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}, (x=atgt)$.

39. $\int \frac{dx}{e^{\frac{x}{2}}+e^x.}$.

40. $\int x^2\sqrt{1-x}dx$.

5.6 Метод интегрирования по частям

Формулой интегрирования по частям в неопределенном интеграле называется формула

$$\int udv = uv - \int vdv,$$

где *u=u(x) и v=v(x)* - дифференцируемые функции от *x*. Она позволяет свести нахождение интеграла $\int udv$ к нахождению интеграла $\int vdu.$

Большую часть интегралов, при нахождении которых применяется формула интегрирования по частям, можно разбить на три группы.

1. Интегралы вида

$$\int P(x)\ln xdx,\ \int P(x)\arcsin xdx,\ \int P(x)\arccos xdx,\ \int P(x)arctgxdx,\ \int P(x)arcctgxdx,$$

где *P(x)* - многочлен некоторой степени *n*. За функцию *u(x)* следует взять одну из функций $\ln x,\ \ln\varphi(x), \arcsin x,\ \arccos x,\ arctgx,\ arcctgx$, тогда $dv = P(x)dx$.

2. Интегралы вида

$$\int P(x)e^{kx}dx,\ \int P(x)\sin kxdx,\ \int P(x)\cos kx,$$

где *P(x)* - многочлен, а *k* – некоторое число. Для их нахождения следует положить *u=P(x),* $dv = e^{kx}dx,\ dv = \sin kxdx,\ dv = \cos kxdx$ соответственно.

3. Интегралы вида

$$\int e^{ax}\sin bxdx,\ \int e^{ax}\cos bxdx,\ \int \sin(\ln x)dx,\ \int \cos(\ln x)dx,$$

где *a* и *b* – некоторые числа. Эти интегралы находятся с помощью двукратного интегрирования по частям.

Пример. Найти интеграл $\int arctgxdx.$

Решение. Применим формулу интегрирования по частям. За функцию *u(x)* возьмем $arctgx$, тогда $dv = dx$. Будем иметь:

$$\int arctgxdx = \left| \begin{matrix} u - arctgx,\ du = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx,\ \ v = \int dx = x \end{matrix} \right| = xarctgx - \int \frac{xdx}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{2xdx}{1+x^2}$$

$$= xarctgx - \frac{1}{2}\int \frac{d(1+x^2)}{1+x^2} = xarctgx - \frac{1}{2}\ln|1+x^2| + C.$$

Пример. Найти интеграл $\int e^x \cos xdx.$

Решение. $\int e^x \cos xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \cos xdx, & v = \int \cos xdx = \sin x \end{matrix} \right| = e^x \sin x - \int e^x \sin xdx.$

Полученный интеграл снова находим интегрированием по частям:

$$\int e^x \sin xdx = \left| \begin{matrix} u = e^x, & du = e^x dx \\ dv = \sin xdx, & v = \int \sin xdx = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x\cos x + \int e^x \cos xdx.$$

Подставляя значение полученного интеграла в предыдущее выражение, будем иметь:

$$\int e^x \cos xdx = e^x \sin x - (-e^x \cos x + \int e^x \cos xdx) = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos xdx.$$

Перенося искомый интеграл из правой части равенства в левую, получаем:

$$2\int e^x \cos xdx = e^x(\cos + \sin x) + C_1,$$

Окончательно имеем:

$$\int e^x \cos xdx = \frac{1}{2}e^x(\cos + \sin x) + C\ .$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\int (1+2x)\cos 2x dx.$ 2. $\int arctg 3x dx.$

3. $\int \ln(2x+3) dx.$ 4. $\int \arcsin 2x dx.$

5. $\int (x+3)\ln 5x dx.$ 6. $\int (x+7)e^{-x} dx.$

7. $\int e^{3x}\cos x dx.$ 8. $\int \frac{x}{\cos^2 x.} dx.$

9. $\int e^{-x}\sin x dx.$ 10. $\int x^2\cos 4x dx.$

11. $\int (x-5)\sin 4x dx.$ 12. $\int x^2 e^{3x+1} dx.$

13. $\int x arctg x dx$. 14. $\int (x^2+2x+3)\ln x dx$.

15. $\int \sin(\ln x) dx.$ 16. $\int \cos(\ln x) dx.$

17. $\int \frac{x}{\sin^2 x.} dx$. 18. $\int \frac{\arcsin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx.$

19. $\int \ln(\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}) dx.$ 20. $\int \sqrt{a^2-x^2} dx.$

5.7 Интегрирование дробно-рациональных функций

Дробно-рациональной функцией или рациональной дробью называется отношение двух многочленов

$$R(x) = \frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + ... + b_m}.$$

Если $n \geq m$, то рациональная дробь называется неправильной, при $n<m$ дробь называется правильной. Всякую неправильную рациональную дробь можно представить (делением числителя на знаменатель “уголком”) в виде суммы многочлена и некоторой правильной дроби

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = P_{n-m}(x) + \frac{R_k(x)}{Q_m(x)} \quad (k < m).$$

Интегрирование дробно-рациональной функции сводится к интегрированию многочлена и правильной рациональной дроби. Так как интегрирование многочленов не представляет затруднений, то основная трудность при интегрировании рациональных дробей заключается в интегрировании правильных дробей. Среди правильных рациональных дробей выделяют четыре типа простейших дробей:

1. $\frac{A}{x-a}$; 2. $\frac{A}{(x-a)^k}$ ($k \geq 2$, целое); 3. $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $(\frac{p^2}{4} - q < 0)$;

4. $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}$ ($k \geq 2$, целое, $\frac{p^2}{4} - q < 0$).

Всякую правильную рациональную дробь можно представить в виде суммы простейших дробей четырех типов, в зависимости от разложения знаменателя на произведение линейных и квадратных сомножителей с учетом их кратности. Каждому простому корню такого разложения будет соответствовать простейшая дробь первого типа. Кратному действительному корню $x = a$ кратности k будет соответствовать цепочка простых дробей:

$$\frac{A_k}{(x-a)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-a)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-a}.$$

Если многочлен имеет комплексные корни, то они входят сопряженной парой. Каждой паре комплексных сопряженных корней будет соответствовать квадратный трехчлен с действительными коэффициентами. В разложении правильной дроби на сумму простейших дробей квадратному трехчлену будет соответствовать простейшая дробь третьего типа. И если имеются кратные комплексные корни, то им будет соответствовать простейшая дробь четвертого типа.

Покажем разложение правильной рациональной дроби ***на примере***.

Пусть $R(x) = \dfrac{x}{(x+1)(x-1)(x^2+2x+2)}$ - правильная рациональная дробь.

Знаменатель дроби представлен в виде произведения линейных и квадратных сомножителей. Знаменатель дроби имеет два действительных и два комплексных корня. Комплексным корням соответствует квадратный трехчлен x^2+2x+2. Этой правильной дроби соответствует разложение

$$R(x) = \frac{x}{(x+1)(x-1)(x^2+2x+2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{Cx+D}{x^2+2x+2}.$$

Действительные числа *A, B, C, D* находятся с помощью метода неопределенных коэффициентов. Приводя к общему знаменателю и приравнивая числители получившихся дробей, приходим к равенству двух многочленов:

$$x = A(x-1)(x^2+2x+2) + B(x+1)(x^2+2x+2) + Cx(x^2-1) + D(x^2-1).$$

Два многочлена тождественно равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях *x*. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем систему уравнений для определения *A, B, C, D, E*:

при x^0 : $-2A+2B-D=0$;

при x^1 : $4B-C=1$;

при x^2 : $A+3B+D=0$;

при x^3 : $A+B+C=0$.

Решив эту систему, найдем коффициенты:

$$A=\frac{1}{2},\ \ B=\frac{1}{10},\ \ C=-\frac{3}{5},\ \ D=-\frac{4}{5}.$$

Разложение рассматриваемой дроби имеет вид:

$$\frac{x}{(x+1)(x-1)(x^2+2x+2)}=\frac{\frac{1}{2}}{x+1}+\frac{\frac{1}{10}}{x-1}+\frac{-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}}{x^2+2x+2}.$$

5.8 Интегрирование простейших дробей

1. $\displaystyle\int\frac{Adx}{x-a}=A\ln|x-a|+C$.

2. $\displaystyle\int\frac{A}{(x-a)^k}dx=\frac{A}{1-k}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}+C,\ \ (k>1)$.

3. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{x^2+px+q}=\frac{M}{2}\ln|x^2+px+q|+\frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}}+C.$

4. $\displaystyle\int\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}dx=\frac{M}{2(1-k)}\frac{1}{(t^2+a^2)^{k-1}}+\left(N-\frac{Mp}{2}\right)I_k\ \ \ (k>1),$

где

$$I_k=\int\frac{dt}{(t^2+a^2)^k},\ \ t=x+\frac{p}{2},\ \ a^2=q-\frac{p^2}{4}.$$

Пример. Найти неопределенный интеграл

$$\int\frac{xdx}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}.$$

Решение. Используя предыдущее разложение, будем иметь:

$$\int\frac{xdx}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}=\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}+\frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{5}\int\frac{3x+4}{x^2+2x+2}dx.$$

$$\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x+1}=\frac{1}{2}\ln|x+1|,\qquad \frac{1}{10}\int\frac{dx}{x-1}=\frac{1}{10}\ln|x-1|,$$

$$\int\frac{3x+4}{x^2+2x+2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{2x+2+\frac{2}{3}}{x^2+2x+2}dx=\frac{3}{2}\int\frac{(2x+2)dx}{x^2+2x+2}+\int\frac{dx}{(x+1)^2+1}=$$

$$\frac{3}{2}\ln|x^2+2x+2|+arctg(x+1).$$

$$\int\frac{xdx}{(x^2-1)(x^2+2x+2)}=\frac{1}{2}\ln|x+1|+\frac{1}{10}\ln|x-1|-\frac{3}{10}\ln|x^2+2x+2|-\frac{1}{5}arctg(x+1)+C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\displaystyle\int\frac{x-2}{(x-1)(x+4)}dx.$

2. $\displaystyle\int\frac{2x-12}{(x-2)(x+3)}dx.$

3. $\int \frac{3x^2+2x-3}{x(x-1)(x+1)}dx.$ 4. $\int \frac{3x-2}{(x+4)^2}dx.$

5. $\int \frac{x-2}{(x-1)^2(x+4)}dx.$ 6. $\int \frac{x-2}{(x^2-5x+4)}dx.$

7. $\int \frac{dx}{x^3+1}.$ 8. $\int \frac{dx}{x^3-1}.$

9. $\int \frac{x^4+3x^3+2x^2+x+1}{x^2+x+1}dx.$ 10. $\int \frac{x^4-2x^3+3x^2+1}{x^2+1}dx.$

11. $\int \frac{dx}{x(x^2+4)}.$ 12. $\int \frac{x^4+1}{x^4-1}dx.$

13. $\int \frac{dx}{x^3+8}.$ 14. $\int \frac{dx}{x^2-6x}.$

15. $\int \frac{x-2}{x^2-3x+3}dx.$ 16. $\int \frac{3x+1}{2x^2-6x+4}dx.$

17. $\int \frac{dx}{x^4+x^2}.$ 18. $\int \frac{x-2}{x^2+4}dx.$

19. $\int \frac{2x^3+x^2-x+5}{x+2}dx.$ 20. $\int \frac{x^2-x+5}{x-2}dx.$

5.9 Интегрирование выражений, содержащих тригонометрические функции

1) Интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$**.** Функция *R(sinx,cosx)* есть рациональная функция относительно *sinx, cosx.* Тогда интеграл $\int R(\sin x, \cos x)dx$ рационализируется с помощью универсальной тригонометрической подстановки $t = tg\frac{x}{2}$. Имеем:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \left| \begin{array}{l} t = tg\frac{x}{2}, \quad x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{array} \right| = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная тригонометрическая подстановка приводит часто к сложным рациональным функциям. Поэтому в ряде случаев более удобны другие подстановки:

а) функция *R(sinx.cosx)* есть нечетная функция относительно *sinx*.

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Применяется подстановка *t=cosx.*

б) функция *R(sinx.cosx)* есть нечетная функция относительно *cosx*.

$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x)$. Применяется подстановка *t=sinx.*

в) функция *R(sinx.cosx)* есть четная функция относительно *sinx* и *cosx.*

$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$. Применяется подстановка $t=tgx$.

2) Интегралы вида $\int \sin^m x \cos^n x dx$.

Если хотя бы одно из чисел m или n – положительное нечетное число, то, отделяя от нечетной степени один сомножитель и выражая с помощью формулы $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ оставшуюся четную степень через дополнительную функцию, приходим к табличному интегралу.

Пример. Найти интеграл $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = \int \sin^2 x \cos^2 x \cos x dx = \int \sin^2 x (1 - \sin^2 x) d(\sin x) = \int \sin^2 x d \sin x -$$

$$- \int \sin^4 x d \sin x = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Если же m и n четные неотрицательные числа, то степени понижаются с помощью тригонометрических формул:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \sin x \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Пример. Найти интеграл $\int \cos^2 x \sin^4 x dx$.

$$\int \cos^2 x \sin^4 x dx = \int (\sin x \cos x)^2 \sin^2 x dx = \int \frac{1}{4} \sin^2 2x \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) dx =$$

$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cos 2x dx = \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) dx - \frac{1}{16} \int \sin^2 2x d \sin 2x =$$

$$= \frac{x}{16} - \frac{1}{64} \sin 4x - \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

3) Интегралы вида $\int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx$

преобразуются к табличным интегралам с помощью формул:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x],$$

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x].$$

Примеры. Найти интегралы:

$$1) \int \cos^5 x dx = \left| \begin{matrix} t = \sin x, \quad dt = \cos x dx \\ \cos^4 x = (1 - \sin^2)^2 = (1 - t^2)^2 \end{matrix} \right| = \int (1 - t^2)^2 dt = t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 + C = | \, t = \sin x \, | =$$

$$= \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

2) $$\int\frac{dx}{3+5\cos x}=\left|\begin{array}{l} t=tg\frac{x}{2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ x=2arctgt,\quad dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right)}=$$

$$=\int\frac{2dt}{3+3t^2+5-5t^2}=\int\frac{2dt}{8-2t^2}=\int\frac{dt}{4-t^2}=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|+C=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+tg\frac{x}{2}}{2-tg\frac{x}{2}}\right|+C.$$

3)

$$\int\sin 3x\cos 2xdx=\int\frac{1}{2}(\sin 5x+\sin x)dx=\frac{1}{2}\int\sin 5xdx+\frac{1}{2}\int\sin xdx=-\frac{1}{10}\cos 5x-\frac{1}{2}\cos x+C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\int\cos^3 xdx.$
2. $\int\sin^5 xdx..$
3. $\int\cos^3\sin^2 xdx.$
4. $\int\sin^3 x\cos^3 xdx.$
5. $\int\cos^2 3xdx.$
6. $\int\cos^4 xdx.$
7. $\int\sin^2 x\cos^2 xdx.$
8. $\int\sin^3 x\cos^2 xdx.$
9. $\int\sin^3 2x\cos^3 2xdx.$
10. $\int\frac{dx}{\cos^4 x}.$
11. $\int\sin 3x\cos 4xdx.$
12. $\int\cos 5x\cos 2xdx.$
13. $\int\sin 3x\sin xdx.$
14. $\int\frac{dx}{3+5\cos x}.$
15. $\int\frac{dx}{3\sin^2 x+5\cos^2 x}.$
16. $\int\frac{\sin xdx}{1-\sin x}.$

5.10 Интегрирование иррациональных функций

Основным приемом для нахождения неопределенных интегралов от иррациональных функций является рационализация подынтегральной функции с помощью замены переменной интегрирования. В зависимости от вида подынтегральной функции применяются различные подстановки:

1) $\int R(x,\sqrt[k]{x},\sqrt[l]{x},...,\sqrt[m]{x})dx.$ Функция R является рациональной относительно указанных величин. Подынтегральная функция рационализируется с помощью подстановки $x=t^N$, где N – наименьшее общее кратное чисел *{k, l, …, m).*

2) Интегрирование дробно-линейных иррациональностей.

Интеграл вида $\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ $(\frac{a}{c}\neq\frac{b}{d})$ рационализируется с помощью подстановки $t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

3) Нахождение интегралов вида $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})dx$,

где R – рациональная функция двух аргументов, производится с помощью тригонометрических подстановок следующим образом. Выделением полного квадрата в квадратном трехчлене с последующей заменой переменной $u = x + \frac{b}{2a}$ исходный интеграл приводится (в зависимости от знака a и дискриминанта квадратного трехчлена) к интегралу одного из следующих трех типов:

1) $\int \widetilde{R}(u,\sqrt{m^2-u^2}du,$ применяется подстановка $u = m\sin t$;

2) $\int \widetilde{R}(u,\sqrt{m^2+u^2})du$, применяется подстановка $u = mtgt$;

3) $\int \widetilde{R}(u,\sqrt{u^2-m^2})du$, применяется подстановка $u = \frac{m}{\cos t}$.

Примеры. Найти интегралы:

1) $$\int \frac{dx}{(\sqrt[4]{x+3}-1)\sqrt{x+3}} = \left|\begin{matrix} x+3=t^4, \\ dx=4t^3dt \end{matrix}\right| = 4\int \frac{t^3dt}{(t-1)t^2} = 4\int \frac{tdt}{t-1} = 4\int \frac{(t-1)+1}{t-1}dt =$$

$$= 4(t+\ln|t-1|)+C = 4(\sqrt[4]{x+3}+\ln|\sqrt[4]{x+3}-1|+C.$$

2) $$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+4x+8)^3}} = \left|\begin{matrix} u=x+2 \\ dx=du \end{matrix}\right| = \int \frac{du}{\sqrt{(u^2+4)^3}} = \left|\begin{matrix} u=2tgt \\ du=\dfrac{2dt}{\cos^2 t} \end{matrix}\right| = \int \frac{1}{8\sqrt{(tg^2t+1)^3}}\frac{2dt}{\cos^2 t} =$$

$$= \frac{1}{4}\int \frac{\cos^3 tdt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\int \cos tdt = \frac{1}{4}\sin t + C = \left| tgt = \frac{u}{2},\ \ \sin t = \frac{tgt}{\dfrac{1}{\cos t}} = \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2t}} = \frac{u}{\sqrt{u^2+4}} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{u}{\sqrt{u^2+4}} + C = |u = x+2| = \frac{1}{4}\frac{x=2}{\sqrt{x^2+4x+8}} + C.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\int \frac{x-1}{1+\sqrt{2x-1}}dx.$

2. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x-1}}dx$.

3. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx.$

4. $\int \frac{\sqrt{x}-1}{1+\sqrt[4]{x}}dx.$

5. $\int \frac{dx}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

6. $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.

7. $\int \frac{\sqrt{1+x}}{x}dx.$

8. $\int x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}dx.$

9. $\int \frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}dx.$

10. $\int \frac{xdx}{1+\sqrt{2x-1}}$.

11. $\int \frac{dx}{\sqrt{4-6x-3x^2}}$.

12. $\int \frac{x^2-3}{x+3}dx.$

• *Смешанные задачи на интегрирование:*

1. $\int \frac{6xdx}{\sqrt[3]{x^2-8}}$.

2. $\int x^3\sqrt{x^2+4}dx$.

3. $\int (tgx+ctgx)^3 dx$.

4. $\int \frac{\sin 2x}{1+\sin^2 x}dx.$

5. $\int x^3\sqrt{x^2+4}dx.$

6. $\int \frac{dx}{\sin x\cos^3 x}.$

7. $\int (5x-2)^8 dx$.

8. $\int \frac{\ln(x-1)}{x}dx.$

9. $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{4-\cos^2 x}}.$

10. $\int \frac{2x-1}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$

11. $\int \cos^2 3xdx.$

12. $\int \frac{dx}{x(x^2+3)}.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.

14. $\int \sin 6x\cos xdx$.

15. $\int \frac{x-1}{\sqrt{2x-1}}dx$.

16. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2x+1}}.$

6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

6.1 Определение и основные понятия

Пусть функция *f(x)* определена на сегменте [*a,b*], *a*<*b*. Выполним следующие действия.

1. Сегмент [*a,b*] разобъем точками $a=x_0<x_1<...<x_n=b$ на *n* частичных сегментов $[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,3,...,n)$.

2. Выберем в каждом частичном сегменте $[x_i,x_{i-1}]$ произвольную точку ξ_i, вычислим значение функции в этой точке и составим сумму произведений значения функции на величину $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = I_n(\xi_i) \qquad (1)$$

Сумма (1) называется интегральной суммой функции *f(x)* на сегменте [*a,b*]. Обозначим $\lambda = \max_i \Delta x_i$ и дадим определение.

Если существует предел интегральной суммы (1) при $n\to\infty$ и $\lambda\to 0$, не зависящий от способа разбиения сегмента [*a,b*] на части и выбора промежуточных точек ξ_i, то этот предел называется определенным интегралом от функции $f(x)$ по сегменту $[a,b]$ и обозначается следующим образом:

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Таким образом, по определению имеем

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i .$$

Числа a и b называются соответственно нижней и верхней границами интегрирования, $f(x)$ – подынтегральной функцией, x – переменной интегрирования.

Функция $f(x)$ называется интегрируемой на сегменте $[a,b]$, если для нее существует определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$.

Теорема существования определенного интеграла. Всякая непрерывная на сегменте $[a,b]$ функция интегрируема на этом сегменте.

Геометрический смысл определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, где $f(x) \geq 0$ для всех $x \in [a,b]$, численно равна определенному интегралу от функции $f(x)$, взятому по сегменту $[a,b]$.

6.2 Основные свойства определенного интеграла

1. $\int_a^a f(x)dx = 0.$ Интеграл с равными нижним и верхним пределами равен нулю.

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$ При изменении направления интегрирования определенный интеграл меняет знак.

3. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_b^a f(x)dx.$ Постоянный множитель выносится за знак определенного интеграла.

4. $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$ k_1, k_2- любые действительные числа.

Интеграл от алгебраической суммы конечного числа функций равен алгебраической сумме интегралов от слагаемых функций.

5. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на сегменте $[a,b]$ и

$f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$

6. **Аддитивность интеграла**. Если функция *f(x)* интегрируема на [*a,c*] и [*c,b*], то она интегрируема также на [*a,b*], причем

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

7. **Теорема о среднем**. Если функция *f(x)* непрерывна на [*a,b*], то на этом сегменте найдется такая точка ξ, что будет справедливо равенство:

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

6.3 Формула Ньютона – Лейбница

Если функция *f(x)* непрерывна на сегменте [*a,b*] и функция $F(x)$ есть некоторая ее первообразная на этом сегменте, то для вычисления определенного интеграла имеет место формула Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Примеры. Вычислить интегралы:

1. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_0^1 = \arcsin 1 - \arcsin 0 = \frac{\pi}{2}.$

2. $\int_1^2 e^x dx = e^x\Big|_1^2 = e^2 - e^1 = e(e-1).$

3. $\int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}} = \int_1^3 \frac{dx}{\sqrt{9-(x-2)^2}} = \arcsin\frac{x-2}{3}\Big|_1^3 = \arcsin\frac{1}{3} - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) = 2\arcsin\frac{1}{3}.$

6.4 Замена переменной в определенном интеграле

Если функция *f(x)* непрерывна на сегменте $[a,b]$ и функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной $x'=\varphi'(t)$ на сегменте $[\alpha,\beta]$, причем $\varphi(\alpha)=a,\ \varphi(\beta)=b,$ то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

Пример. Вычислить интеграл $\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx.$

Решение.

$$\int_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx = \left| \begin{array}{l} t=\sqrt{e^x-1},\ \text{если}\ x=\ln 2, \text{то}\ t=\sqrt{e^{\ln 2}-1}=\sqrt{2-1}=1 \\ t^2=e^x-1 \quad \text{если}\ x=0, \quad \text{то}\ t=0 \\ 2tdt=e^x dx,\ dx=\dfrac{2tdt}{t^2+1} \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{2t^2dt}{t^2+1} =$$

$$=2\int_0^1 \frac{t^2+1-1}{t^2+1}dt = 2\int_0^1 \left(1-\frac{1}{t^2+1}\right)dt = 2(t-arctgt)\Big|_0^1 = 2(1-arctg1) = 2-\frac{\pi}{2}.$$

6.5 Интегрирование по частям в определенном интеграле

Если функции *u(x)* и *v(x)* непрерывны вместе со своими производными *u'(x)* и *v'(x)* на сегменте $[a,b]$, то имеет место формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. $\int_0^1 (\sqrt{x}-x^2)dx.$

2. $\int_1^2 \left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)dx.$

3. $\int_1^3 \frac{2x^3-3x^2+5}{x}dx.$

4. $\int_0^{\pi/4} \frac{x^2}{1+x^2}dx.$

5. $\int_0^1 (\sqrt{1+x}+\frac{x}{x^2+1})dx$.

6. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}dx.$

7. $\int_2^5 \frac{dx}{2x-3}.$

8. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 xdx$.

9. $\int_0^{\pi/2} \cos^2 xdx$.

10. $\int_1^2 (5x-3)^3 dx.$

11. $\int_0^1 \frac{dx}{(3-2x)^3}.$

12. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\sin^3 2x+3}{\sin^2 2x}dx.$

13. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2+6x+7}.$

14. $\int_1^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+7}}.$

15. $\int_4^9 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}dx$.

16. $\int_0^5 x\sqrt{x+4}dx.$

17. $\int_0^1 \sqrt{4-x^2}dx.$

18. $\int_1^3 \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}dx$.

19. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e\ \ -1}dx.$

20. $\int_1^5 \frac{x}{\sqrt{4x+1}}dx$.

21. $\int_1^e \frac{1+\ln x}{x}.$

22. $\int_0^{\sin 1} \frac{(\arcsin x)^2+1}{\sqrt{1-x^2}}.$

23. $\int_0^1 \frac{4arctgx-x}{1+x^2}.$

24. $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+1}.$

25. $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

26. $\int_0^3 xarctgxdx.$

27. $\int_0^{\pi/6} x\cos 3xdx.$

28. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}.$

29. $\int_0^1 \arcsin xdx.$

30. $\int_0^{2\pi} x^2\cos\frac{x}{2}dx.$

31. $\int_0^{\pi^2/9} \sin\sqrt{x}dx.$

32. $\int_3^{\pi} (x^2-3x)\sin 2xdx.$

33. $\int_0 \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}.$

34. $\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{\cos^4 x}.$

35. $\int_3^8 \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}dx$.

36. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x-e^{-x}}dx.$

37. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos 3xdx.$

38. $\int_{-1}^0 \frac{x+2}{x^2+2x+2}dx$.

39. $\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x}$.

40. $\int_0^1 \frac{x^2dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

41. $\int_{-3}^1 \frac{xdx}{\sqrt{3-2x}}$.

42. $\int_1^5 x\ln 2xdx$.

43. $\int_0^{\pi/2} \sin x\cos^2 xdx$.

44. $\int_0^{\pi/2} \sin^2 x\cos xdx$.

45. $\int_0^3 \frac{dx}{x+x^2}$.

46. $\int_0^1 (x^2+3)e^{2x}dx$.

47. $\int_0^{\pi} \sin^3 xdx$.

48. $\int_0^{\pi/3} tg^3xdx$.

6.6 Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования

Пусть функция *y=f(x)* определена и непрерывна при всех значениях *x* на бесконечном интервале $a \le x < +\infty$. Для любого конечного сегмента $[a,b]$ интеграл $\int_a^b f(x)dx$ существует и является непрерывной функцией от *x*.

Если существует конечный предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

то этот предел называют несобственным интегралом от функции *f(x)* на интервале $[a,+\infty)$ и обозначают символом $\int_a^{+\infty} f(x)dx$.

По определению имеем

$$\int_{a.}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_a^b f(x)dx.$$

В этом случае говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **существует** или **сходится**. Если указанный предел не существует или бесконечен, то говорят, что интеграл **не существует** или **расходится.**

Аналогично определяются несобственные интегралы:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^b f(x). \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{a\to-\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx,$$

где c – любая фиксированная точка оси Ox.

Из определений ясно, что несобственный интеграл является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла с переменной границей интегрирования.

Если $f(x) \geq 0$ $\forall x\in[a;+\infty)$, то несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ можно рассматривать как площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y=f(x)$, бесконечным интервалом оси Ox $[a,+\infty)$ и прямой $x = a$.

Пример. Исследовать сходимость несобственного интеграла $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k}$.

Решение. Рассмотрим интеграл $\int_1^b \frac{dx}{x^k}$ $(b>1)$.

Если $k\neq 1$, то $\int_1^b \frac{dx}{x^k} = \left.\frac{x^{-k+1}}{1-k}\right|_1^b = \frac{1}{1-k}(b^{1-k}-1).$

Если же $k=1$, то $\int_1^b \frac{dx}{x} = \ln x\Big|_1^b = \ln b.$

При $k>1$, 1- k < 0 и поэтому $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}(b^{1-b}-1) = \frac{1}{k-1}.$

При $k<1$, 1- $k>$ 0 и поэтому $\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to+\infty}\int_1^b\frac{dx}{x^k} = \lim_{b\to+\infty}\frac{1}{1-k}(b^{1-b}-1) = +\infty.$

Если же $k = 1$, то $\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_1^{b}\frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln x\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty}\ln b = +\infty.$

Таким образом, при $k \le 1$ интеграл расходится, при $k > 1$ интеграл сходится.

6.7 Несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция *y=f(x)* непрерывна $\forall x,\ a \le x < b$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ функция $f(x)$ интегрируема на сегменте $[a, b-\varepsilon]$.

Если существует конечный предел $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$, то этот предел называют несобственным интегралом от неограниченной функции *f(x)* и обозначают символом $\int\limits_a^b f(x)dx$. В этом случае говорят, что несобственный интеграл **существует** или **сходится**. Если указанный предел не существует, то говорят, что несобственный интеграл **не существует** или **расходится**.

По определению имеем

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)dx.$$

Аналогично определяется несобственный интеграл в случае $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

Если *f(x)* не ограничена при приближении *x* справа к точке *a*, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{c\to +0}\int\limits_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx.$$

Если же функция *f(x)* не ограничена в некоторой внутренней точке *c* сегмента [*a,b*] и функция *f(x)* не ограничена в любой окрестности точки *c*, то

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to +0}\int\limits_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\delta\to +0}\int\limits_{c+\delta}^{b} f(x)dx.$$

Таким образом, из определений непосредственно видно, что несобственный интеграл от неограниченной функции является не пределом интегральных сумм, а пределом определенного интеграла.

Пример. Исследовать на сходимость интеграл $\int\limits_0^2\frac{dx}{(x-1)^2}$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{1}{(x-1)^2}$ не ограничена в точке x = 1. Поэтому рассмотрим отдельно интегралы $\int\limits_0^1\frac{dx}{(x-1)^2}$ и $\int\limits_1^2\frac{dx}{(x-1)^2}$. Оба интеграла расходятся, так как

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int_0^{1-\delta} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(-\frac{1}{x-1} \right)\Bigg|_0^{1-\delta} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(-\frac{1}{1-\delta-1} - 1 \right) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(\frac{1}{\delta} - 1 \right) = +\infty,$$

$$\int_{1+\delta}^2 \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \int_{1+\delta}^{2} \frac{dx}{(x-1)^2} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(-\frac{1}{x-1} \right)\Bigg|_{1+\delta}^{2} = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(-1 + \frac{1}{1+\delta-1} \right) = \lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta>0}} \left(-1 + \frac{1}{\delta} \right) = +\infty .$$

Следовательно, несобственный интеграл $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ расходится.

УПРАЖНЕНИЯ

•*Вычислить несобственные интегралы (или установить их расходимость)*:

1. $\int_0^{\infty} e^{-2x} dx$.
2. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^2}$.
3. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{2x+1}$.
4. $\int_{-\infty}^{0} e^{3x} dx$.
5. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+7}$.
6. $\int_0^1 \ln x dx$.
7. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x-2}$.
8. $\int_0^{1/3} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.
9. $\int_0^{\pi/2} ctgx dx$.
10. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln^2 x}$.
11. $\int_2^{\infty} \frac{dx}{x\ln x}$.
12. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-2)^2}$.
13. $\int_{-1}^2 \frac{dx}{\sqrt[3]{x-1}}$.
14. $\int_0^{\infty} \frac{actgx}{x^2+1} dx$.
15. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.
16. $\int_0^{\infty} \sin x dx$.
17. $\int_1^3 \frac{dx}{(x-3)^2}$.
18. $\int_1^2 \frac{dx}{x^2-2x-1}$.
19. $\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2-4x+20}$.
20. $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x}$.

7. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ

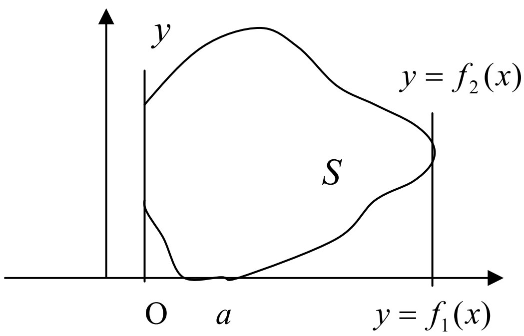
7.1 Вычисление площадей плоских фигур

1. Вычисление площади плоской фигуры в декартовой системе координат.

Если на сегменте [*a,b*] непрерывная функция *f(x)* ≥ 0, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой *y = f(x),* осью O*x* и прямыми *x = a* и *x = b,* равна определенному интегралу

$$S_{кр.т} = \int_a^b f(x)dx.$$

В общем случае, если фигура представляет собой часть плоскости, ограниченной непрерывными кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $a \le x \le b$, ($f_1(x) \le f_2(x)$) и двумя отрезками прямых *x = a, x = b* (отрезки прямых могут вырождаться в точку), то площадь такой фигуры можно представить в виде суммы и (или) разности площадей криволинейных трапеций.



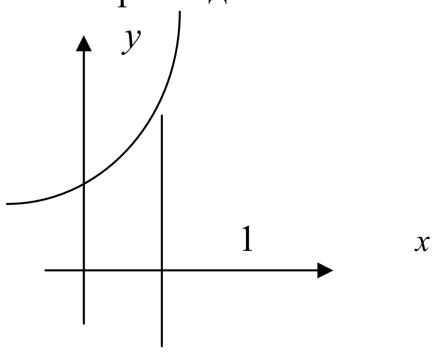
Для вычисления площади такой фигуры будем иметь формулу

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями:

$y = 1 - x^2$, $y = e^x$, $x = 1$.

Решение. Сделаем схематический чертеж. Построим данные линии.



$$S = \int (f_2(x) - f_1(x))dx = \int_0^1 (e^x - (1 - x^2))dx =$$

$$= \int_0^1 e^x dx - \int_0^1 dx + \int_0^1 x^2 dx = e^x\Big|_0^1 - x\Big|_0^1 + \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 =$$

$$= e - 1 - 1 + \frac{1}{3} = e - \frac{5}{3}.$$

Пусть кривая, ограничивающая криволинейную трапецию сверху, задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \phi(t),\ t_1 \le t \le t_2$, причем $a = \varphi(t_1), b = \varphi(t_2)$. Тогда площадь фигуры D может быть вычислена по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)\phi'(t)dt\,.$$

2. Вычисление площади в полярной системе координат

Пусть плоская фигура D расположена в полярной системе координат и представляет собой криволинейный сектор, ограниченный непрерывной кривой $r = r(\varphi),\ \alpha \le \varphi \le \beta,\ 0 < \beta - \alpha \le 2\pi$ и отрезками лучей $\varphi = \alpha$ и $\varphi = \beta$. Отрезки лучей могут вырождаться в точку. Тогда площадь фигуры вычисляется по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной кардиоидой $r = a(1 + \cos\varphi)$.

Решение. Область определения функции будет $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} r^2(\varphi)d\varphi = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2(1 + \cos\varphi)^2 d\varphi = = \frac{a^2}{2}\int_0^{2\pi}(1 + 2\cos\varphi + \cos^2\varphi)d\varphi = \frac{3}{2}a^2\pi.$$

УПРАЖНЕНИЯ

- *Найти площади фигур, ограниченных линиями:*

1. $y = 2x - x^2$ и осью Оx. 2. $y = x^2 + 2,\ x + y = 4.$

3. $y^2 = x^3,\ y = 1,\ x = 0.$ 4. $y = x^3,\ y = x,\ y = 2x.$

5. $y = x^2 - 3x - 4,\ y = 2x - 4.$ 6. $x = -2y^2,\ x = 1 - 3y^2.$

7. $y = (x - 2)^3,\ y = 4x - 8.$ 8. $y = 4 - x^2, y = x^2 - 2x,$

9. $y = \sqrt{4 - x^2},\ y = 0,\ x = 0,\ x = 1,$ 10. $y = \sqrt{e^x - 1},\ y = 0,\ x = \ln 2.$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной осью Оx и одной аркой циклоиды $\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

12. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t. \end{cases}$

13. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\begin{cases} x = 3\cos^3 t \\ y = 3\sin^3 t. \end{cases}$

14. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями
$\begin{cases} x = 2(t - \sin t) \\ y = 2(1 - \cos t) \end{cases}$, $y \ge 3$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$\begin{cases} x = 8\sqrt{2}\cos^3 t \\ y = \sqrt{2}\sin^3 t \end{cases}, \quad x = 4 \ (x \geq 4).$$

16. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho = 4\cos 3\varphi$.

17. Найти площадь одного лепестка кривой $\rho = a\sin 4\varphi$.

18. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 2\cos\varphi$, $\rho = 3\cos\varphi$.

19. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $\rho = 3\sin\varphi$, $\rho = 5\sin\varphi$.

7.2 Вычисление длин дуг плоских кривых

1 .Длина дуги в прямоугольных координатах.

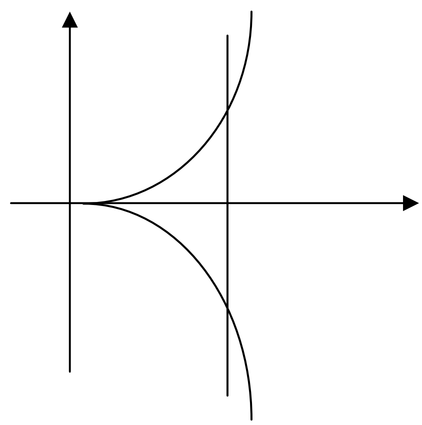
Если линия задана уравнением *y=f(x),* $a \leq x \leq b$, то длина дуги L вычисляется по формуле

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}dx.$$

Пример. Найти длину дуги полукубической параболы $y = x^{3/2}$ от $x = 0$ до x =5.

Решение.

Кривая симметрична относительно оси Ox. Найдем длину верхней части кривой. Из уравнения $y = x^{3/2}$ находим производную $y' = \frac{3}{2}x^{1/2}$. По формуле для длины дуги получаем:



$$L = \int_0^5 \sqrt{1 + y'^2(x)}dx = \int_0^5 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x}dx = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9x}{4}\right)^{3/2}$$

2. Если линия задана параметрическими уравнениями $\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \phi(t) \end{cases}$ $(\alpha \leq t \leq \beta)$, то длина дуги L вычисляется по формуле

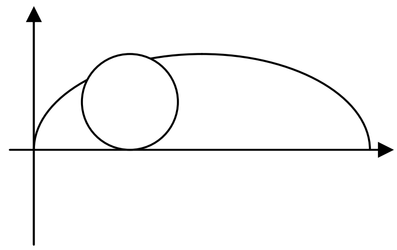
$$L = \int_a^b \sqrt{\varphi'^2(t) + \phi'^2(t)}dt.$$

Пример. Найти длину одной арки циклоиды $\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$,$0 \leq t \leq 2\pi.$

Решение.

Из уравнения циклоиды находим $\varphi'(e) = a(1-\cos t),\ \phi'(t) - a\sin t.$ По формуле для длины дуги будем иметь

$$L = \int_0^{2\pi} a\sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t}\,dt = 2a\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\,dt = -4a\cos$$



3. Если линия задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi),\ (\alpha \le \varphi \le \beta)$, то длина дуги L вычисляется по формуле:

$$L = \int_\alpha^\beta \sqrt{\rho(\varphi) + \rho'^2(\varphi)}\,d\varphi\ .$$

УПРАЖНЕНИЯ

1. Вычислить длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x$ от x = 1 до x = e.

Отв. $\frac{1}{4}(e^2+1).$

2. Вычислить длину дуги кривой $y^2 = \frac{4}{9}(2-x)^2$ от x = -1 до x = 2.

Отв. 14/3.

3. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\sin x$ от $x = \frac{\pi}{3}$ до $x = \frac{2\pi}{3}$.

Отв. $ln3$.

4. Вычислить длину дуги кривой $y = \ln\cos x$ от x = 0 до $x = \frac{\pi}{6}$.

Отв. $\frac{1}{2}\ln 3.$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t. \end{cases}$

Отв. 12.

6. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 4(t\sin t + \cos t) \\ y = 4(\sin t - t\cos t). \end{cases}$ $(0 \le t \le 1)$.

Отв. 2.

7. Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = 2(1-\cos\varphi),\ 0 \le \varphi \le 2\pi.$

Отв. 16.

8. ТЕОРИЯ РЯДОВ

8.1 Понятие числового ряда

Рассмотрим числовую последовательность $u_1, u_2, ..., u_k, ...$ (1).

Определение. Выражение вида

$$a_1 + a_2 + ... + a_k + ... = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \qquad (2)$$

называется числовым рядом или просто рядом, элементы a_k называются членами данного ряда.

Определение. Сумма конечного числа n первых членов ряда называется $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$ $n-$ой частичной суммой ряда.

Обозначим $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$

Рассмотрим последовательность частичных сумм

$$\begin{aligned}
&S_1 = a_1 \\
&S_2 = a_1 + a_2 \\
&\dots \\
&S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \\
&\dots
\end{aligned} \qquad (3)$$

Определение. Ряд (2) называется сходящимся, если сходится последовательность частичных сумм $\{S_n\}_{n\geq 1}$ этого ряда, т.е. если существует конечный предел последовательности частичных сумм. При этом предел S (конечный или бесконечный) последовательности частичных сумм называется суммой ряда.

Таким образом, для сходящегося ряда, имеющего сумму S можно формально записать $S = \sum_{r=1}^{\infty} a_k$.

В противном случае, если $\lim S_n = \infty$, либо предел не существует, то ряд называется расходящимся.

Таким образом, сходимость ряда (2) равносильна существованию конечного предела последовательности частичных сумм (3).

8.2 Свойства сходящихся рядов

Если в ряде (2) отбросить первые m членов, то получается ряд $a_{m+1} + a_{m+2} + ... + a_{m+k} + ... = \sum_{n=m+1}^{\infty} a_n$ (5), называемый остатком ряда (2) после m-члена.

1. Если сходится ряд (2), то сходится и всякий из его остатков (5), причем выполняется $S = S_n + r_n, r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Обратно, из сходимости хотя бы одного остатка (5) вытекает сходимость исходного ряда (2).

Вывод: Отбрасывание конечного числа начальных членов ряда или присоединение в начале его нескольких новых членов не отражается на поведении ряда (в смысле его сходимости или расходимости).

Следствие. Если ряд (2) сходится, то $\lim r_n = 0$.

2. Ряд не может иметь двух различных сумм.

3. Если данный ряд сходится, то и всякий ряд, полученный из него группировкой слагаемых, сходится и имеет ту же сумму, что данный ряд. Обратное неверно.

Пример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}$ расходится, а ряд $(1-1)+(1-1)+...$ из 0 сходится.

4. Если члены сходящегося ряда (2) умножить на один и тот же множитель c, то его сходимость не нарушится (а сумма лишь умножится на c).

5. Два сходящихся ряда $A = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ и $B = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$ можно почленно складывать (или вычитать), так что ряд $(a_1 \pm b_{1)}) + (a_2 \pm b_2) + ...(a_n \pm b_n) + ...$ также сходится и его сумма равна $A \pm B$.

8.3 Необходимое условие сходимости ряда

Рассмотрим необходимый признак сходимости ряда, т.е. установим условие, при невыполнении которого ряд расходится.

Теорема. Общий член a_n сходящегося ряда стремится к 0.

Следствие. Если общий член a_n ряда не стремится к 0 при $n \to \infty$, то ряд расходится.

Пример. $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + ... + \frac{n}{2n+1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1}$ расходится, так как $\lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0$.

Замечание. Условие $\lim a_n = 0$ является необходимым, но не достаточным, т.е. из того, что $\lim a_n = 0$ не следует, что ряд сходится.

Пример. Гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$ расходится, хотя $\lim \frac{1}{n} = 0$.

Покажем расходимость гармонического ряда:

Запишем данный ряд в виде

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{3}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16})+...$$

(1)

Напишем вспомогательный ряд

$$1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})+(\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16})+...$$

(2)

S_n^1 - $n-$ая частичная сумма ряда (1),

S_n^2 - $n-$ая частичная сумма ряда (2).

Для $n>2$ $S_n^1 > S_n^2$, так как каждый член ряда (1) больше соответствующего члена ряда (2).

Вычислим частичные суммы ряда (2) для значений n равных $2^1, 2^2, 2^3, 2^4, ..., 2^k$:

$$S_2^2 = 1+\frac{1}{2} = 1+1\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_4^2 = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+2\cdot\frac{1}{2}$$

$$S_8^2 = 1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}) = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1+3\cdot\frac{1}{2}$$

…

$$S_{2^k}^2 = 1+k\cdot\frac{1}{2}$$

Тогда $\lim S_n^2 = \infty \Rightarrow \lim S_n^1 = \infty$, т.е. гармонический ряд расходится.

8.4 Сходимость положительных рядов

Это ряды, члены которых неотрицательны:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ... \quad , \quad a_n \ge 0 \ , \ n = 1,2,3,...$$

Тогда $S_{n+1} = S_n + a_{n+1} \ge S_n$, т.е. $S_n -$ возрастающая последовательность.

По теореме о пределе монотонной последовательности следует утверждение, что положительный ряд всегда имеет сумму. Эта сумма будет конечной (и следовательно, ряд будет сходиться), если частичные суммы ряда ограничены сверху, и бесконечной (ряд будет расходиться) - в противном случае. (Все признаки сходимости положительных рядов основаны на этой теореме).

8.5 Теоремы сравнения рядов

Сходимость или расходимость положительного ряда часто устанавливают путем сравнения его с другим рядом, заведомо сходящимся или расходящимся.

Теорема 1 (первая теорема сравнения). Пусть даны два положительных ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ (А), $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + ... + b_n + ...$ (В)

Если, хотя бы начиная с некоторого номера $n > N$, выполняется $a_n \le b_n$, то из сходимости ряда (В) вытекает сходимость ряда (А) или из расходимости ряда (А) следует расходимость ряда (В).

Теорема 2 (вторая теорема сравнения). Если существует $\lim \frac{a_n}{b_n} = k$ $(0 \le k \le \infty)$, то из сходимости ряда (В) при $0 \le k < \infty$ вытекает сходимость ряда (А), а из расходимости ряда (В) при $k > 0$ вытекает расходимость ряда (А).

Таким образом, при $0 < k < \infty$ оба ряда сходятся или расходятся одновременно.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+a^n}$ $(a > 0)$.

Если $a \le 1$, то нарушается необходимое условие сходимости и, следовательно, ряд расходится.

Если $a > 1$, то $1 + a^n > a^n \Rightarrow \frac{1}{1+a^n} < \frac{1}{a^n} = (\frac{1}{a})^n$.

Но $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{1}{a})^n$ сходится и, следовательно, данный ряд сходится по первой теореме сравнения.

8.6 Достаточные признаки сходимости положительных рядов

Теорема 1 (Признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \ge 0$, $n = 1,2,3,...$

Тогда, если существует предел $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$, то:

1) ряд сходится в случае $q < 1$;

2) ряд расходится в случае $q > 1$.

В случае $q = 1$ ответа на вопрос о сходимости или расходимости ряда теорема не дает.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$

$\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} = 0 < 1$, ряд сходится.

Теорема 2. (Признак Коши). Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $a_n \geq 0$, $n = 1,2,3,...$

Если существует предел $\lim \sqrt[n]{a_n} = q$, то:

1) в случае $q < 1$ ряд сходится;

2) в случае $q > 1$ ряд расходится.

В случае $q = 1$ признак не работает: требуется дополнительное исследование.

Пример. $\frac{1}{3} + (\frac{2}{5})^2 + (\frac{3}{7})^3 + ... + (\frac{n}{2n+1})^n + ...$

$\lim \sqrt[n]{u_n} = \lim \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, ряд сходится.

Теорема 3. (Интегральный признак сходимости ряда).

Пусть члены ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (1) положительны и не возрастают, т.е. $a_1 \geq a_2 \geq ... \geq a_n \geq ...$ и пусть $f(x)$ - такая непрерывная, положительная и невозрастающая функция, что $f(n) = a_n$, $n = 1,2,3,...$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x)dx$ сходится, то сходится и ряд (1).

2) если указанный интеграл расходится, то расходится и ряд (1).

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ Применим интегральный признак.

Функция $f(x) = \frac{1}{x^p}$ удовлетворяет всем условиям теоремы:

$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} x^{1-p} /_1^N = \frac{1}{1-p}(N^{1-p} - 1)$, при $p \neq 1$

и $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \ln x /_1^N = \ln N$, при $p = 1$.

Исследуем сходимость несобственного интеграла:

1) $p > 1$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{1-p} < \infty \Rightarrow$ ряд сходится по интегральному признаку;

2) $p < 1$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty \Rightarrow$ ряд расходится;

3. $p = 1$ $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty \Rightarrow$ ряд расходится.

8.7 Знакочередующиеся ряды

Рассмотрим ряды, члены которых имеют чередующиеся знаки, т.е.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}c_n$ (1), где $c_n > 0$.

Теорема (Лейбница). Если в знакочередующемся ряде (1) члены $c_1 > c_2 > c_3 > ... > c_n > ...$ (2) - условие монотонного убывания и $\lim c_n = 0$, то ряд (1) сходится, его сумма положительна и не превосходит первого члена.

Замечание. Теорема Лейбница также справедлива, если условие монотонного убывания (2) выполняется, начиная с некоторого номера $n > N$.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ...$ сходится по теореме Лейбница, так как выполнено:

1) монотонное убывание $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > ...$;

2) $\lim \frac{1}{n} = 0$.

8.8 Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости

Определение. Ряд называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные (количество положительных и количество отрицательных членов бесконечно, т.к. если конечное плюс бесконечное, то можно отбросить конечное число членов).

Знакочередующиеся ряды являются частным случаем знакопеременных рядов.

Рассмотрим знакопеременный ряд $u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ (1)

и ряд, составленный из абсолютных величин $|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ...$ (2).

Определение. Ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд из абсолютных величин (2).

Теорема 1 (достаточный признак сходимости знакопеременного ряда). Если ряд (1) сходится абсолютно, то он сходится.

Пример. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$, где α - $\forall$ число. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$, так как $\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$, то по первой теореме сравнения ряд из абсолютных величин сходится, следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

Замечание. Теорема 1 является достаточным признаком сходимости знакопеременного ряда, но не необходимым.

Существуют такие знакопеременные ряды, которые сами сходятся, но ряды, составленные из абсолютных величин их членов, расходятся.

Введем понятие условной сходимости знакопеременного ряда.

Определение. Ряд (1) называется условно сходящимся, если ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ расходится, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ - сходится.

Примеры.

1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$, ряд из абсолютных величин $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится. Но $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ сходится по теореме Лейбница. Следовательно, ряд сходится условно.

2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}$, так как $\left|\frac{\sin n}{n^2}\right|<\frac{1}{n^2}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, то по первой теореме сравнения ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n^2}$ сходится. Следовательно, исходный ряд сходится абсолютно.

8.9 Функциональные ряды

Определение 1. Ряд $u_1+u_2+...+u_n+...$ называется функциональным, если его члены являются функциями от $x: u_n=u_n(x)$.

Рассмотрим функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+.... \qquad (1)$$

Давая x определенные числовые значения, мы получаем различные числовые ряды, которые могут оказаться сходящимися или расходящимися.

Определение 2. Совокупность тех значений x, при которых функциональный ряд сходится, называется областью сходимости этого ряда.

В области сходимости ряда (1) его сумма является функцией x. Обозначим $S(x)$ - сумму ряда (1).

Пример. $1+x+x^2+...+x^4+....$

при $|x|<1$ имеем большой убывающий прогресс с суммой $\frac{1}{1-x}$

$S(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+...$ при $|x|<1$.

Обозначим $S_n(x)$ сумму первых *и* членов (1). Если ряд (1) сходится и его сумма $S(x)$, то $S(x)=S_n(x)+r_n(x)$, где $r_n(x)$ - остаток ряда и $r_n(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+....$

Для всех $\forall x \in$ область ряда имеем:
$\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = \lim\limits_{n\to\infty}[S(x) - S_n(x)] = S(x) - S(x) = 0$.

8.10 Мажорируемые ряды

Определение. Функциональный ряд

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots \qquad (1)$$

называется мажорируемым в некоторой области изменения x, если существует такой сходящийся числовой ряд

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots \qquad (2)$$

с положительными членами, что для всех значений x из данной области выполняются соотношения

$$|u_1(x)| \le \alpha_1,\ |u_2(x)| \le \alpha_2, \ldots,\ |u_n(x)| \le \alpha_n \qquad (3)$$

Пример. $\dfrac{\cos x}{1} + \dfrac{\cos 2x}{2^2} + \dfrac{\cos 3x}{3^2} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{n^2} + \ldots$

Ряд мажорируем на всей числовой оси.

Для всех n $\left|\dfrac{\cos nx}{n^2}\right| \le \dfrac{1}{n^2}$, а ряд $1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{n^2} + \ldots$ сходится.

Признак Вейерштрасса. Если функциональный ряд (1), мажорируемый в некоторой области $\overset{[a,b]}{D}$, то он абсолютно и равномерно сходится в области $\overset{[a,b]}{D}$.

Доказательство: $u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots$ (1) сходится в области D.

Так как $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n + \ldots$ (2) - сходящийся знакоположительный ряд, его сумма

$\sigma = \sigma_n + \varepsilon_n,\ \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma,\ \ \lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0:\ \ S(x) = S_n(x) + r_n(x)$.

Так как ряд мажорирумый, то $|u_{n+1}(x)| \le \alpha_{n+1},\ |r_n(x)| < \varepsilon_n\ \forall x \in D$.

Следовательно, $|S(x) - S_n(x)| = |r_n(x)| < \varepsilon_n$, причем $\varepsilon_n \to 0\ n \to 0\ \forall x \in D$, это означает равномерную сходимость ряда.

Определение. Функциональный ряд $u_1(x) + u_2(x) + \ldots$ называется равномерно сходящимся функциональным рядом на отрезке $[a,b]$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N, что при всех $n > N$ будет выполняться неравенство: $|S(x) - S_n(x)| < \varepsilon$ для $\forall x \in [a,b]$.

8.11 Непрерывность суммы ряда. Интегрирование и дифференцирование рядов

Известно, что сумма конечного числа непрерывных функций будет также непрерывная функция. Будет ли иметь это положение для рядов?

Теорема 1. Сумма ряда непрерывных функций, мажорируемого на отрезке $[a,b]$, является функцией непрерывной на $[a,b]$.

Теорема 2. Равномерно сходящийся на отрезке $[a,b]$ ряд непрерывных функций $S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ можно почленно интегрировать:

$$\int_{x_0}^{x} S(t)dt=\int_{x_0}^{x} u_1(x)dx+\int_{x_0}^{x} u_2(x)dx+\ldots+\int_{x_0}^{x} u_n(x)dx+\ldots,$$

где $x_1 x_0 \in [a,b]$. Полученный при этом ряд равномерно сходится на $[a,b]$.

Теорема 3. Пусть на отрезке $[a,b]$ задан ряд $u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$ функций, имеющих непрерывные производные.

Если ряд сходится в некоторой точке $x_0 \in [a,b]$, и кроме того, ряд $u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$ равномерно сходится на $[a,b]$, то исходный ряд равномерно сходится на $[a,b]$ и производная от его суммы $S(x)$ является суммой ряда производных функций:

$$S(x)=u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)+\ldots$$
$$S'(x)=u_1'(x)+u_2'(x)+\ldots+u_n'(x)+\ldots$$

8.12 Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+\ a_1x^1+\ a_2x^2+\ldots+\ a_nx^n+\ldots\ , \tag{1}$$

где постоянные $a_0,\ a_1,\ a_2,\ldots,a_n,\ldots$ называются коэффициентами степенного ряда. n-ным членам степенного ряда называют члена a_nx^n, хотя он стоит в степенном ряде на n +1 месте.

Теорема Абеля. Если степенной ряд (1) сходится в точке $x_0 \neq 0$, то он сходится абсолютно в интеграле $(-|x_0|,|x_0|)$, т.е. при всяком x, удовлетворяющем условию $|x|<|x_0|$; если степенной ряд (1) расходится точки $x_0^1 \neq 0$, то он расходится при всяком x, удовлетворяющем условию $|x|>|x_0|$.

Из теоремы Абеля следует, что все точки сходимости расположены от начала координат не дальше, чем любая из точек расходимости и заполняют некоторый интервал с центром в начале координат.

Для каждого степенного ряда, имеющего точки сходимости и расходимости, имеется положительное число R, что для всех x, удовлетворяющих условию $|x|<R$, ряд сходится . И это число R называется радиусом сходимости степенного ряда (1), а интервал (-R,R) –

интервалом сходимости. При R=$\pm x$ ряд может сходиться, может и расходиться для установления его сходимости.

Радиусы сходимости степенных рядов устанавливаются следующими способами. Составляются ряд из абсолютных величин членов степенного ряда (1):

$$|a_0| + |a_1||x| + |a_2||x^2| + \dots + |a_n||x|^n + \dots \quad (2)$$

Для определения сходимости ряда с положительными членами (2) применяется признак Даламбера. Пусть существует предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right||x| = L\,|x|\,.$$

Тогда по признаку Даламбера ряд (2) сходится при $|x| < \frac{1}{L}$ и расходится при $|x| > \frac{1}{L}$. Следовательно, исходный ряд (1) сходится абсолютно, если $|x| < \frac{1}{L}$, и расходится, если $|x| > \frac{1}{L}$. Поэтому интервалом сходимости степенного ряда (1) будет (-R,R), где

$$R = \frac{1}{L} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| \quad (3)$$

Радиус сходимости степенного ряда (1) определяется также с применением признаком Коши по формуле

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} \quad (4)$$

Теорема 1. Степенные ряды мажорируем на любом отрезке [-α, α], целиком лежащем внутри интервала сходимости (- R,R).

Теорема 2. Сумма мажорируемого степенного ряда S(x) есть функция, имеющая внутри интервала сходимости (-R,R) производные любого порядка, каждая из которых есть сумма ряда, полученного по членным дифференцированием данного ряда соответствующее число ряд, при этом каждый ряд имеет один и тот же интервал сходимости (-R,R).

Теорема 3. Мажорируемый степенной ряд (1) можно почленно интегрировать, если пределы интегрирования α, β лежат внутри интервала сходимости (-R,R), и интеграл от суммы S(x) ряда равен сумме интегралов от членов ряда.

Степенным рядом также называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots \quad (5)$$

ряд (5) есть степенной ряд по степенным двучлена (x-a).

Для определения области сходимости ряда (5) вводится замена переменного x-a=X, и он принимает вид

$$a_0 + a_1 X^1 + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n + \dots \tag{6}$$

Пусть интервал сходимости ряда (6) есть (-R,R). Тогда интервалом сходимости данного ряда (5) будет интервал (a-R, a+R) с центром в точке a. Все свойства степенного ряда (1) внутри интервала сходимости (-R,R) сохраняются и для степенного ряда (5) внутри интервала сходимости (a-R, a+R).

8.13 Ряды Тейлора и Маклорена

Пусть функция $f(x)$ является суммой степенного ряда по степеням разности x-a, сходящегося в некотором интервале:

$$f(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

Тогда в интервале сходимости, который, как известно, относительно точки a, ряд можно почленно дифференцировать любое число раз.

Дифференцируя, получим:

$$f`(x) = 1\cdot a_1 + 2a_2(x-a) + 3a_3(x-a)^2 + 4a_4(x-a)^3 + \cdots + na_n(x-a)^{n-1} + \cdots$$

$$f``(x) = 1\cdot 2a_2 + 2\cdot 3a_3(x-a) + 3\cdot 4a_4(x-a)^2 + 4\cdot 5a_5(x-a)^3 + \cdots + n(n-1)a_n(x-a)^{n-2} + \cdots$$

$$f```(x) = 1\cdot 2\cdot 3a_3 + 2\cdot 3\cdot 4a_4(x-a) + \cdots + n(n-1)(n-2)a_n(x-a)^{n-3} + \cdots$$

$$f^{(n)}(x) = 1\cdot 2\cdot 3\cdots na_n + 2\cdot 3\cdot 4\cdots(n+1)a_{n+1}(x-a) + \cdots$$

Полагая в этих равенствах $x=a$, получим:

$$f(a) = a_0,\ f`(a) = 1\cdot a_1,\quad f``(a) = 2!a_2,\quad f```(a) = 3!a_3, \dots, f^{(n)}(a) = n!a_n, \dots,$$

откуда находим:

$$a_0 = f(a), a_1 = \frac{f`(a)}{1!},\quad a_2 = \frac{f``(a)}{2!},\quad a_3 = \frac{f```(a)}{3!}, \dots,\quad a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \dots$$

Подставляя полученные выражения коэффициентов в ряд для *f(x),* запишем:

$$f(x) = f(a) + \frac{f`(a)}{1!}(x-a) + \frac{f``(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

Определение. Рядом Тейлора функции *f(x)* по степеням *x-a* или, что тоже в окрестности точки *a,* называется степенной ряд вида:

$$f(a) + \frac{f`(a)}{1!}(x-a) + \frac{f``(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \cdots$$

(при этом предполагается, что функция *f(x)* бесконечно дифференцируема в точке *a*).

При *a=0* получим ряд по степеням *x*, который называется рядом Маклорена функции *f(x).*

Приведенными рассуждениями доказана **теорема**:

Если функция *f(x)* в некоторой окрестности точки *a* является суммой степенного ряда по степеням *x-a*, то этот ряд является рядом Тейлора функции *f(x)*.

Разность между функцией *f(x)* и частной суммой $S_n(x)$ ряда Тейлора функции *f(x)* называется остаточным членом ряда Тейлора и обозначается $R_n(x)$:

$R_n(x)=f(x)-S_n(x)$, где функция $R_n(x)$ имеет следующий вид: $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$, где ξ лежит между *a* и *x*.

Если воспользоваться определениями сходимости и суммы ряда, то получим следующую **теорему:** для того чтобы ряд Тейлора функции $f(x)$ сходился к ней в некотором интервале, необходимо и достаточно, чтобы в рассматриваемом интервале стремился к нулю остаточный член этого ряда.

Таким образом, задача разложения функции $f(x)$ в степенной ряд сведена по существу к определению значений x, при которых $R_n(x)\to 0$.

8.14 Основные табличные разложения

$$\ell^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots \qquad (|x|\angle\infty)\ ;$$

$$Sinx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{(2n-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \quad (|x|\angle\infty)\ ;$$

$$Cosx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \qquad (|x|\angle\infty)\ ;$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots \quad (|x|\angle\infty)\ ;$$

$$\ell n(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots(-1\angle x \le 1)\ ;$$

$$arctgx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| \le 1)\ ;$$

$$shx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots \qquad ;$$

$$chx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Пример 1. Разложить в ряд Маклорена функцию $f(x)=e^x$.

Решение. Для нахождения ряда Маклорена вычисляем значения функции $f(x)=e^x$ и ее производных при $x=0$:

$f(x)=e^x$, $f(0)=1$

$f`(x)=e^x$, $f``(0)=1$

$f^{``}(x)=e^x$, $f^{``}(0)=1$

$f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ $(n=1,2,3,\ldots)$.

$$f(x)=f(0)+\frac{f^{`}(0)}{1!}x+\frac{f^{``}(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots$$

$R_n(x)=\dfrac{e^{\xi}}{(n+1)!}x^{n+1}$, где $\xi=\theta x$, $0<\theta<1$.

Учитывая, что $e^{\xi}<e^{|x|}$, на основании $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x^n}{n!}=0$ заключаем, что при любом значении x $R_n(x)\to 0$, поэтому справедливо $e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$

УПРАЖНЕНИЯ

Пример 1. Исследовать сходимость ряда $\dfrac{4}{2}+\dfrac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\dfrac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\ldots$

Решение: Общий член ряда имеет вид

$$a_n=\frac{4\cdot 7\cdot 10\ldots(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\ldots(4n-2)}.$$

Отсюда находим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}.$$

Согласно признаку Даламбера, ряд сходится.

Пример 2. Исследовать сходимость знакопеременного ряда

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}.$$

Решение: Представляя общий член ряда в виде

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{n-1}=(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n-1}-\frac{1}{n-1}$$

и замечая, что ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n\sqrt{n}}{n-1}$ по признаку Лейбница сходится, а ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n-1}$ - расходится (к $+\infty$), заключаем, что данный ряд также расходится (к $+\infty$).

Пример 3. Исследовать на равномерную сходимость функцию:

$$f_n(x)=\frac{nx}{1+n+x},\ 0\le x\le 1.$$

Решение: Так как $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{nx}{1+n+x}=x$, то справедлива оценка $\sup\limits_{x\in[0,1]}\left|\dfrac{nx}{1+n+x}-x\right|\le\dfrac{2}{n+1}$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sup\limits_{x\in[0,1]}|f_n(x)-f(x)|\right)=0$, следовательно, последовательность $f_n(x)$ равномерно стремится к x.

Пример 4. Исследовать на равномерную сходимость ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{((n-1)x+1)(nx+1)},\quad 0<x<+\infty.$$

Решение: Находим частичную сумму ряда:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x}{((k-1)x+1)(kx+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{(k-1)x+1}-\frac{1}{kx+1}\right)=1-\frac{1}{nx+1},$$

откуда получаем, что $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)=1,\ \ 0<x<+\infty$. Далее, поскольку $\sup\limits_{0<x<+\infty}\dfrac{1}{nx+1}=1$, то ряд сходится неравномерно.

Пример 5. Определить радиус и интервал сходимости и исследовать поведение в граничных точках интервала сходимости степенного ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n.$$

Решение: По формуле Коши-Адамара имеем

$$\frac{1}{R}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{3^n+(-2)^n}{n}}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{\frac{9^k+4^k}{2k}}=3,$$

поэтому при $-\dfrac{4}{3}<x<-\dfrac{2}{3}$ ряд сходится абсолютно.

Исследуем поведение степенного ряда на концах интервала сходимости. Пусть $x=-\dfrac{4}{3}$. Нетрудно видеть, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+(-2)^n}{n}\cdot\dfrac{(-1)^n}{3^n}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$ сходится, так как он равен сумме двух сходящихся рядов.

Пусть $x=-\frac{2}{3}$. Тогда числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n+(-2)^n}{n3^n}$, в силу признака сравнения, расходится $\left(\frac{3^n+(-2)^n}{n3^n}=\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n}>\frac{1}{4n}\right)$. Следовательно, в точке $x=-\frac{4}{3}$ степенной ряд сходится лишь условно, в точке $x=-\frac{2}{3}-$ расходится.

Пример 6. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=|x|$ в интервале $(-\pi,\pi)$.

Решение*:* Эта функция непрерывна на $(-\pi,\pi)$ и имеет кусочно-непрерывную производную всюду, за исключением точки $x=0$. Периодически (с периодом 2π), продолжив функцию f на всю числовую прямую, построим функцию $f^*: x\mapsto |x-2k\pi|$, если $|x-2k\pi|\le\pi$, где $k\in Z$. Построенная функция удовлетворяет требованиям теоремы о разложимости в сходящийся к ней ряд Фурье.

Поскольку функция f^* четная, то $b_n=0$:

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi n^2}\left((-1)^n-1\right),\quad a_0=\pi.$$

Следовательно,

$$f^*(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},\qquad -\infty<x<+\infty,$$

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)x}{(2k+1)^2},\qquad -\pi<x<\pi.$$

Пример 7. Исследовать ряды на сходимость, учитывая образцы примеров 1-6:

7. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n$
8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n-1)(n^2+2)}$
10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+1}}$

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-)^{n-1}}{3n+5}$

12. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\left(\frac{3n+1}{4n+7}\right)^{2n}$

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}$

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\cdot 7^{n}\cdot n^{4}}{n}$

15. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^{2}}{3^{n}}$

16. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$

Контрольная работа № 1 (Варианты 1-10) по теме «Предел и непрерывность функции»

Вариант 1

- Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2-6x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^4-2x^2+1}{2x^5+13x^2-6x}$.

3) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$. 4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2+5x+3}$.

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-3}{x^2-3x}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{arctg3x}{4x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3+x+4}{3x^3-6}\right)^{2x}$. 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{x-6}\right)^{\frac{x}{2}}$.

- Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases}x-1, & x\le 0,\\ x^2, & 0<x<2,\\ 2x, & x\ge 2.\end{cases}$ 10) $y=6^{\frac{1}{x-2}}$.

Вариант 2

- Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-22x+15}{2x^4+13x^2-6x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^4-2x^2+x}{2x^4+3x^2-6}$.

3) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{3x^2-14x-5}{x^2-2x-15}$. 4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+3x+3}{x^2+5x+6}$.

5) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{x^2-3x+2}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2ctg3x}{\sin 4x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{3x-6}\right)^{3-2x}$. 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+4}{x-6}\right)^{x+1}$.

- Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases}-x, & x\le 0,\\ x^2+1, & 0<x<2,\\ x+1, & x\ge 2.\end{cases}$ 10) $y=3^{\frac{1}{x-2}}$.

Вариант 3

- Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^3-12x+1}{2x^4+3x^2-6}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^4-2x^2+10}{2x^4+13x^2-6x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x+16}{2x^2+5x+11}$.

5) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x+3}-1}{x^3-27}$.

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\arcsin(x-2)}{x^2-2x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+x+4}{3x^3-6}\right)^{2x}$.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-6}\right)^{2x-3}$.

•Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases} x-1, & x\le 0 \\ \sin x, & 0<x<\pi, \\ 3, & x\ge \pi. \end{cases}$

10) $y=9^{\frac{1}{x-1}}$.

Вариант 4

•Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+1}{-2x^3+3x^2-x}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{14x^4-2x^2+1}{x^3+13x^2-16}$.

3) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+7x+10}{2x^2+9x+10}$.

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{2x^2+3x+1}{2x^2-2x-4}$.

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{1-\sqrt{2x+3}}{4x-4x^3}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{4x^2}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{3x-6}\right)^{2x}$.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{3x-6}\right)^{2x}$.

•Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases} 1, & x\le 0 \\ 2^x, & 0<x<2, \\ x+3, & x\ge 2. \end{cases}$

10) $y=\dfrac{x+2}{x^2-4}$.

Вариант 5

•Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-2x+1}{2x^4+3x^2-6}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x+10}{x^4+3x^2-6x}$.

3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-7x-4}{2x^2-13x+20}$.

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2+3x+6}{2x^2+10}$.

5) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\sqrt{x+11}-3}{2-\sqrt{x+6}}$.

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{arctg(x-2)}{x^2-2x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+4}{3x^3-6}\right)^{2x}$.

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-2}{x+3}\right)^{2x-3}$.

- Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases}3x+4, & x\le -1\\ x^2+2, & -1<x<2,\\ x, & x\ge 2.\end{cases}$

10) $y=\dfrac{2x-5}{x^2+x-2}$.

Вариант 6

- Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x-6}{-x^3+3x^2-x}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-20x^2+12}{x^3+13x^2-16}$.

3) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{2x^2-11x+5}$.

4) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{92x^2+3x+10}{2x^2-2x-20}$.

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4-3x^2}-\sqrt{2x+3}}{1+x^3}$.

6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-\cos^5 x}{\sin^2 3x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+14}{3x-6}\right)^{2+x}$.

8) $\lim\limits_{x\to -1}(4x+5)^{\frac{1}{x+1}}$.

- Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases}x, & x<-2\\ 1-x, & -2\le x\le 1,\\ x^2-1, & x>1.\end{cases}$

10) $y=\dfrac{x+3}{x^2-2x-3}$.

Вариант 7

- Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^5-12x^2+1}{2x^4+x^2-6}$.

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+10x}{3x^2-6x+3}$.

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2-x-1}$.

4) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{4x^2+x-3}{2x^2+x-1}$.

5) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{4+x}}{x^2+3x+2}$.

6) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^2-4}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x^3+x+4}{3x^3-6}\right)^{2x}$.   8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{x-6}\right)^{2x-3}$.

•Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases}-1, & x\le 0\\ \cos x, & 0<x<\pi,\\ 1-x, & x\ge\pi.\end{cases}$ 10) $y=4^{\frac{1}{x-1}}$.

Вариант 8

• Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2+3}}$.   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x^4-32x^2+18}{x^4+13x^2-16}$.

3) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3x^2-8x-3}{2x^2-9x+9}$.   4) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{2x^2+3x+1}{3x^2-12x+24}$.

5) $\lim\limits_{x\to8}\dfrac{\sqrt{2x}-\sqrt{3x-8}}{x^2-5x-24}$.   6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x\sin x}$.

7) $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{5x+7}{x+3}\right)^{\frac{2}{x+1}}$.   8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+4}{8x-6}\right)^{2x}$.

•Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases}x, & x\le 0\\ x^3, & 0<x<2,\\ x+4, & x\ge 2.\end{cases}$ 10) $y=1+e^{\frac{1}{x+2}}$.

Вариант 9

•Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{9x^4+6x-8}}{3x^2-6}$.   2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-22x^2+10}{2x^3+3x^2-6x}$.

3) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-11x+2}{2x^2-4x}$.   4) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+13x+16}{2x^2+5x+3}$.

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{3x+3}-\sqrt{3-2x}}{x^3-2x}$.   6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin4x}{tg3x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x^3+5x}{3x^3-6x}\right)^{2x}$.   8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3+4x}{2+4x}\right)^{x-2}$.

•Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases} x+3, & x\le 0 \\ 1, & 0<x<2, \\ x^2-2, & x\ge 2. \end{cases}$ 10) $y=8^{\frac{1}{x-2}}$.

Вариант 10

• Найти пределы следующих функций:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^3-2x+1}{3x^2-x}$. 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{24x^4-2x^2+1}{x^4+x^2-6}$.

3) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{2x^2+7x-4}{2x^2+13x+20}$. 4) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+3x+1}{x^2-2x-4}$.

5) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3-\sqrt{2x+3}}{27-x^3}$. 6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{\arcsin 4x}$.

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+4}{3x^2-6}\right)^{2x}$. 8) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+4}{5x-6}\right)^{2x+1}$.

• Найти точки разрыва функции и указать их характер. В случае точек разрыва первого рода найти скачок функции. Сделать схематический чертеж:

9) $y=\begin{cases} -x, & x\le 0 \\ x^2, & 0<x<2, \\ x+1, & x\ge 2. \end{cases}$ 10) $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$.

Контрольная работа №2 (варианты 1-12) по теме «Производная и дифференциал»

Вариант 1

• Найти производные:

1. $y=\arcsin^3 2x+\sqrt{tgx}$. 2. $y=\dfrac{2x^2+3x}{3x}$.

3. $\begin{cases} x=3\sin^4 t, & y'_x=? \\ y=3\cos^4 t. \end{cases}$ 4. $x^3+3y^2-4xy+8=0$.

5. Найти частное значение производной от функции $y=e^{2x}+\sqrt{10x-1}$ при x=1.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=1-x^2$ в точке с абсциссой x=1.

7. Найти дифференциал функции $y=\sqrt{1+x^2}$.

8. Найти вторую производную от функции $y=\ln x$.

Вариант 2

•Найти производные:

1. $y=(1+ctg3x)e^{-5x}$.

2. $y=\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{3x-5}}$.

3. $\begin{cases} x=\cos t+t\sin t, & y'_x=?\\ y=\sin t-t\cos t. \end{cases}$

4. $(x+y)^2+(x-3y)^2=0$.

5. Найти частное значение производной от функции $y=e^{2x}arctgx$ при x=1.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=2+x^3$ в точке с абсциссой

x=1.

7. Найти дифференциал функции $y=x\sqrt{1+x^2}$.

8. Найти вторую производную от функции $y=\ln^2 x$.

Вариант 3

•Найти производные:

1. $y=\ln(x^3+2x)+\sqrt{\sin x}$.

2. $y=\dfrac{1-\sin 2x}{1+\sin 3x}$.

3. $\begin{cases} x=\sqrt{1-t^2} & y'_x=?\\ y=3\arccos t. \end{cases}$

4. $4x^3+3y^2-4xy+8x=0$.

5. Найти частное значение производной от функции $y=e^{2x}tgx$ при x=$\dfrac{\pi}{4}$.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=2x-x^2$ в точке с абсциссой x=2.

7. Найти дифференциал функции $y=\arcsin^2 x$.

8. Найти вторую производную от функции $y=tgx$.

Вариант 4

•Найти производные:

1. $y=\ln^3(tg2x)+\sqrt{x^2+1}$.

2. $y=\left(\dfrac{2x^2+3}{x-1}\right)^3$.

3. $\begin{cases} x=3tg2t, & y'_x=?\\ y=ctg2t. \end{cases}$

4. $x^3+3e^y-4y+8x=0$.

5. Найти частное значение производной от функции $y=arctg^2x$ при x=1.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=x^2+3x-4$ в точке с абсциссой x=1.

7. Найти дифференциал функции $y = e^{x^2}$.

8. Найти вторую производную от функции $y = \arcsin 2x$.

Вариант 5

•Найти производные:

1. $y = \ln(\sin 2x) + \cos^3 x.$

2. $y = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 + 4}}.$

3. $\begin{cases} x = arctg 2t, & y'_x = ? \\ y = \ln(1 + 4t^2). \end{cases}$

4. $3e^{x+y} - 4y^2 + 8x = 0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y = \arcsin 3x$ при x=0.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2 + 3x$ в точке с абсциссой x=1.

7. Найти дифференциал функции $y = e^{3x} \cos x.$

8. Найти вторую производную от функции $y = tgx$.

Вариант 6

•Найти производные:

1. $y = tge^{2x} + 7^x - x^7 \ln 7.$

2. $y = \dfrac{2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4}}.$

3. $\begin{cases} x = \ln t, & y'_x = ? \\ y = \dfrac{1}{2}(t + \dfrac{1}{t}). \end{cases}$

4. $x^2 + y^2 + \sin(2x - 3y) = 0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y = (x+1)arctgx$ при x=0.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y = \cos 3x$ в точке с абсциссой x=0.

7. Найти дифференциал функции $y = ctg\sqrt{x}.$

8. Найти вторую производную от функции $y = e^{3x} \cos x.$

Вариант 7

• Найти производные:

1. $y = \sin^3 2x + \sqrt{x^2 + 1}.$

2. $y = \left(\dfrac{2x^2 + 3x}{x + 1}\right)^3.$

3. $\begin{cases} x = 5tg 2t, & y'_x = ? \\ y = ctg 2t. \end{cases}$

4. $y^3 + 3e^x - 4y + 8x = 0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y = \arcsin^2 x$ при x=1.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=-x^2+3x$ в точке с абсциссой x=1.

7. Найти дифференциал функции $y=ctg^2x$.

8. Найти вторую производную от функции $y=\arccos 2x$.

Вариант 8

• Найти производные:

1. $y=\sin\ln x+\cos^3 x.$

2. $y=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+4}}.$

3. $\begin{cases} x=arcctg2t, & y'_x=? \\ y=\ln(1+4t^2). \end{cases}$

4. $3e^{x+y}-8y+3x=0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y=\arcsin(3x+1)$ при x=0.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=x^3+3x$ в точке с абсциссой x=1.

7. Найти дифференциал функции $y=e^x\cos 3x.$

8. Найти вторую производную от функции $y=ctgx$.

Вариант 9

• Найти производные:

1. $y=\sin e^{2x}+7^x-x^7\ln 7.$

2. $y=\dfrac{2x-x^2}{\sqrt{x+4}}.$

3. $\begin{cases} x=\ln(t+1), & y'_x=? \\ y=\dfrac{1}{2}(t+1)^2. \end{cases}$

4. $x^3+y^3+\sin(2x-3y)=0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y=(x^2+1)arctgx$ при x=0.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y=\cos 2x$ в точке с абсциссой x=0.

7. Найти дифференциал функции $y=tg\sqrt{x}.$

8. Найти вторую производную от функции $y=e^{3x}\sin x.$

Вариант 10

• Найти производные:

1. $y=\ln\sqrt{x^2+1}+3x^2.$

2. $y=\left(\dfrac{2x+3}{x^2-1}\right)^3.$

3. $\begin{cases} x = 3\cos 2t, & y'_x = ? \\ y = \sin 2t. \end{cases}$

4. $x^3 + 3\cos x - 4y^2 + x = 0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y = arctg^3 x$ при x=1.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y = -x^2 + 4$ в точке с абсциссой x=1.

7. Найти дифференциал функции $y = tg\dfrac{x}{2}.$

8. Найти вторую производную от функции $y = \arcsin x.$

Вариант 11

•Найти производные:

1. $y = \ln(\sin 2x) + \cos 3x.$

2. $y = \dfrac{2x - 1}{\sqrt{x^2 + 4.}}$

3. $\begin{cases} x = arctg 2t, & y'_x = ? \\ y = 1 + 4t^2 \end{cases}$

4. $e^{x+y} - y^2 + x = 0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y = \arcsin 5x$ при x=0.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y = x^2 - 3x$ в точке с абсциссой x=1.

7. Найти дифференциал функции $y = e^{3x}\cos x.$

8. Найти вторую производную от функции $y = \ln(x^2 + 1)$.

Вариант 12

•Найти производные:

1. $y = e^{2x} + 8^x - x\ln 8.$

2. $y = \dfrac{2x - x^2}{\sqrt{x^2 + 4.}} + \sin 2x.$

3. $\begin{cases} x = \ln(t^2 + 1), & y'_x = ? \\ y = \dfrac{1}{2}(t^2 + 1)^2. \end{cases}$

4. $x^2 + y^2 + \cos(2x - 3y) = 0.$

5. Найти частное значение производной от функции $y = (x + 1)tgx$ при x=0.

6. Написать уравнение касательной к кривой $y = \cos 3x$ в точке с абсциссой x=0.

7. Найти дифференциал функции $y = ctg\sqrt{x}.$

8. Найти вторую производную от функции $y = e^{3x}(x + 1).$

Контрольная работа № 3 (варианты 1-10)
по теме «Неопределенный интеграл»

Вариант 1

1. $\int \frac{(x-\sqrt{x})^2}{x}dx$.
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{3x^2-6}}$.
3. $\int e^{\sin 2x}\cos 2xdx$.
4. $\int \frac{3^{2x}}{1+3^{4x}}dx$.
5. $\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.
6. $\int x\cos\frac{x}{3}dx$.
7. $\int \frac{x^2-3}{x-4}dx$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+2}$.
9. $\int arctgxdx$.
10. $\int tg^3 xdx$.
11. $\int \sin^2 5xdx$.
12. $\int \sin^3 xdx$.

Вариант 2

1. $\int \frac{(1+\sqrt{x})^2}{x}dx$.
2. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4+ч^2}}$.
3. $\int \frac{3^ч}{\sqrt{x}}dx$.
4. $\int \frac{e^{2x}}{1+e^{4x}}dx$.
5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+1}}$.
6. $\int x\ln xdx$.
7. $\int \frac{x^2-3}{x+3}dx$.
8. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+2}$.
9. $\int ar\sin xdx$.
10. $\int \cos x\sin 5xdx$.
11. $\int \cos^2 4xdx$.
12. $\int \cos^3 xdx$.

Вариант 3

1. $\int \frac{(x+2\sqrt{x})^2}{x}dx$.
2. $\int \frac{x^2dx}{1-x^3}$.
3. $\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.
4. $\int \frac{6^x}{1+6^{2x}}dx$.
5. $\int \frac{xdx}{x^2+4x+5}$.
6. $\int xe^{2x}dx$.
7. $\int \frac{x^2-4x-3}{x-4}dx$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x+2}}$.
9. $\int arctg2xdx$.
10. $\int 2\cos^2\frac{x}{2}dx$.

11. $\int \sin x \sin 5x dx$.

12. $\int \frac{3-\sin^3 x}{\sin^2 x} dx$.

Вариант 4

1. $\int \frac{(x-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}} dx$.

2. $\int \frac{(x-5)dx}{x^2+1}$.

3. $\int x\sqrt{4+x^2} dx$.

4. $\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx$.

5. $\int \frac{xdx}{x^2+2x+5}$.

6. $\int x \sin 3x dx$.

7. $\int \frac{x^3}{x-2} dx$.

8. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}+x}$.

9. $\int \arccos 3x dx$.

10. $\int \sin^3 2x dx$.

11. $\int (1+\sin^2 3x) dx$.

12. $\int \cos x \cos 3x dx$.

Вариант 5

1. $\int \frac{(x^2-3)^2}{x} dx$.

2. $\int \frac{(2x-1)dx}{\sqrt{4-x^2}}$.

3. $\int xe^{2x} dx$.

4. $\int \frac{8^x}{1+8^{2x}} dx$.

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$.

6. $\int x arctgx dx$.

7. $\int \frac{x^2-3x+2}{x-2} dx$.

8. $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$.

9. $\int \frac{tgx+1}{\cos^2 x} dx$.

10. $\int \sin^5 x dx$.

11. $\int \cos 2x \sin 8x dx$.

12. $\int \frac{dx}{(3x=5)^5} dx$.

Вариант 6

1. $\int \frac{(x-1)(x^2+3)}{x^2} dx$.

2. $\int \frac{\sqrt{x}}{x(x+1)} dx$.

3. $\int e^{\cos 2x} \sin 2x dx$.

4. $\int \frac{xdx}{1+x^4}$.

5. $\int \frac{xdx}{x^2-2x+7}$.

6. $\int (x+1)\cos(x+1) dx$.

7. $\int \frac{x^2-3x}{x-2} dx$.

8. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4+25x^2}}$.

9. $\int x arctgx dx$.

10. $\int ctg^3 x dx$.

11. $\int \sin^2 2xdx$.

12. $\int \sin x \cos 3xdx$.

Вариант 7

1. $\int \frac{(x-\sqrt[3]{ч})^2}{x}dx$.

2. $\int \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{3x^3-6}}$.

3. $\int e^{-x^2}xdx$

4. $\int \frac{3^{2x}}{4+3^{4x}}dx$.

5. $\int \frac{xdx}{x^2+4x+5}$.

6. $\int x^2 \cos xdx$.

7. $\int \frac{x^2+2x-3}{x-4}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[3]{x}+2}$.

9. $\int arctg 2xdx$.

10. $\int tg^3 2xdx$.

11. $\int \sin^2 \frac{2}{3}xdx$.

12. $\int \sin^3 4xdx$.

Вариант 8

1. $\int \frac{(2x-\sqrt{x})^2}{x}dx$.

2. $\int \frac{x^4dx}{\sqrt{3-5x^5}}$.

3. $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$.

4. $\int \frac{e^{2x}}{2+e^{2x}}dx$.

5. $\int \frac{xdx}{(2x+1)^3}$.

6. $\int x^2 \ln xdx$.

7. $\int \frac{x^2+6x-3}{x-3}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}+2}$.

9. $\int \arcsin 3xdx$.

10. $\int \cos^3 2xdx$.

11. $\int \sin^2 \frac{5x}{3}dx$.

12. $\int \sin x \cos 3xdx$.

Вариант 9

1. $\int \frac{(x-\sqrt{x})(ч+2)}{x}dx$.

2. $\int \frac{dx}{x\ln^2 x}$.

3. $\int \frac{dx}{\cos^2 x \sin^2 x}$.

4. $\int \frac{arctgx}{1+x^2}dx$.

5. $\int \frac{(x+1)dx}{x^2+2x+5}$.

6. $\int x\cos(2x+3)dx$.

7. $\int \frac{x^2-3x+3}{x+1}dx$.

8. $\int \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt[4]{x}+1}$.

9. $\int arctg\frac{x}{4}dx$.

10. $\int 2\cos^3 2x\sin 2xdx$.

11. $\int \sin^2\frac{5x}{2}dx$.

12. $\int \sin x\sin 3xdx$.

Вариант 10

1. $\int\frac{(x-\sqrt{x})(x+\sqrt{z})}{x}dx$.

2. $\int\frac{(4x+1)dx}{\sqrt{7-2x^2}}$.

3. $\int(2x+1)e^{-x}dx$.

4. $\int\frac{\sqrt{tg2x}+1}{\cos^2 2x}dx$.

5. $\int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-3x+4}}$.

6. $\int(2-\cos^2\frac{x}{2})dx$.

7. $\int\frac{x^2+2x-3}{2x+2}dx$.

8. $\int\frac{xdx}{1+\sqrt{x+1}}$.

9. $\int xarctgxdx$.

10. $\int\sin^3\frac{x}{2}dx$.

11. $\int\cos x\sin 5xdx$.

12. $\int\frac{(3+\cos^2 x)}{\cos^2 x}dx$.

Контрольная работа №4 (варианты 1-10) по теме «Определенный интеграл»

Вариант 1

1. Вычислить: а) $\int\limits_{-1}^{0}\frac{dx}{x+1+\sqrt[3]{x+1}}$, б) $\int\limits_{0}^{\pi/2}x\cos xdx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int\limits_{3}^{\infty}\frac{dx}{(x-2)^2}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=2x,\ y=1-x,\ x=2.$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y=2-x^2,\ y=x,\ x\geq 0.$

5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $y^2=(x-1)^3$ между точками A(2;-5) и B(5;-8).

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной верхней половиной кривой $\rho=2(1+\cos\varphi)$.

Вариант 2

1. Вычислить: а) $\int\limits_1^8 \frac{dx}{x+\sqrt[3]{x}}$, б) $\int\limits_0^{\pi/2} x\sin 2x dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $xy=3$, $x+y=4$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=0$, $x=2$.

5. Вычислить длину дуги полукубической параболы $9y^2=4(3-x)^3$ между точками пересечения ее с осью Oy.

6. Вычислить площадь одного лепестка фигуры, ограниченной линией $\rho=2\sin 2\varphi$.

Вариант 3

1. Вычислить: а) $\int\limits_4^9 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{x}-1}$, б) $\int\limits_0^{e-1} x^2\ln(x+1)dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int\limits_0^{\infty} e^{3x}dx.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y=x^2-2x$, $y=2x-3$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y=x^3$, $y=8$, $x=0$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x=2(t-\sin t) \\ y=2(1-\cos t) \end{cases}$, $0\le t\le \pi/2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho=4\sin\varphi$.

Вариант 4

1. Вычислить: а) $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+\sqrt{3x+1}}$, б) $\int\limits_0^{\pi/6} (2x+1)\sin 3x dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{dx}{(2x-1)^4}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 3x - x^2$, $y = 2$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y = e^{-2x}$, $x = -1$, $x = 1$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi/2$.

6. Вычислить площадь одного лепестка фигуры, ограниченной линией $\rho = 2\cos 2\varphi$..

Вариант 5

1. Вычислить: а) $\int_0^3 \frac{dx}{1+\sqrt{3x}}$, б) $\int_0^{1/2} \arcsin x dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{4+x^2}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оy фигуры, ограниченной линиями $xy = 4$, $y = 1$, $y = 4$, $x = 0$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t - \dfrac{t^3}{3} \end{cases}$, $0 \le t \le \sqrt{3}$.

6. Вычислить площадь одного лепестка фигуры, ограниченной линией $\rho = 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \pi/2$.

Вариант 6

1. Вычислить: а) $\int_1^5 \frac{(2x+1)dx}{\sqrt{4x+5}}$, б) $\int_0^1 (2x+1)2^x dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_2^\infty \frac{dx}{x^2+4x+5}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x + 1$, $y = x + 1$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ох фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 1$, $y = 5$.

5. Вычислить длину дуги кривой $y = x^{3/2}$ от точки O(0;0) до точки A(4;8).

6. Вычислить площадь одного лепестка фигуры, ограниченной линией $\rho = 2(1-\cos\varphi)$.

Вариант 7

1. Вычислить: а) $\int_{-3}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{3-2x}}$, б) $\int_{0}^{21} arctg 3x dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_{1}^{\infty} e^{\frac{1}{x}} \frac{dx}{x^2}.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sqrt{x-1},\ \ x-5=0.$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линией $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}$, $0 \le t \le 2\pi$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = -4\sin\varphi.$

Вариант 8

1. Вычислить: а) $\int_{4}^{9} \frac{(3-x)dx}{x-3+\sqrt{x-3}}$, б) $\int_{0}^{e-1} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^3} dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{4x+1}} dx.$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x,\ \ y = 0.$

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y^2 = 4x,\ \ x = 1.$

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2\cos^3 t \\ y = 2\sin^3 t \end{cases}$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = \sin 3\varphi.$

Вариант 9

1. Вычислить: а) $\int_{0}^{8} \frac{\sqrt{2x}dx}{1+2x}$, б) $\int_{0}^{e-1} (x+3)e^{2x} dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^3} dx .$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4x - x^2$, $y = x$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Оx фигуры, ограниченной линиями $y = (x+1)^2$, $y = -x + 1$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 3(t - \sin t) \\ y = 3(1 - \cos t) \end{cases}$, $0 \le t \le \pi/2$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 4\cos\varphi$.

Вариант 10

1. Вычислить: а) $\int_0^3 \frac{\sqrt{3x}dx}{\sqrt{3x}+1}$, б) $\int_0^2 x\cos(x+1)dx$.

2. Вычислить несобственный интеграл или установить его расходимость:

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{4x^2+1} dx .$$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 - 2x$, $y = -x + 2$.

4. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox фигуры, ограниченной линиями $y = (x-1)^3$, $y = 0$, $x = 3$.

5. Вычислить длину дуги кривой $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases}$, $0 \le t \le \pi$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линией $\rho = 1 - \sin\varphi$.

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум. - М.: ИД Юрайт, 2012.
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. – М., 2005. Т.1-2.
3. Никольский С.М. Курс математического анализа. - М.: «Наука», 2001.
4. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т.1-3, - М.: «Наука», 2009.
5. Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н. Лекции по математическому анализу. - М.: «Высшая школа», 1999.
6. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. - М.: «Наука», 2003.
7. Шипачев В. С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2002.
8. Данко П. Е., Попов А. Г., Кожевникова Т. Я. Высшая математика в упражнениях и задачах. Уч. пособие. – М.ОНИКС, 21 век, - М.: Мир и образов. 2002, Ч.2.
9. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пос. для студентов вузов. - М.: Наука, 2011.
10. Ильин В.А., Поздняк Э.Г. Основы математического анализа. – М.: Наука, 1993.
11. Мордкович А.Г., Солодовников А.С. Математический анализ. – М.: Высшая школа, 1990.
12. Мантуров О.В., Матвеев Н.М. Курс высшей математики. – М.: Высшая школа, 1986.

ГЛОССАРИЙ

Двойной интеграл – обобщение понятия определенного интеграла на двумерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

Диаметр множества – наибольшее расстояние между двумя точками множества.

Замыкание области – объединение области и ее границы.

Знакопеременный ряд - ряд, среди членов которого имеются как положительные, так и отрицательные переменные.

Криволинейный интеграл – обобщение понятия определенного интеграла, связанное с заменой отрезка интегрирования на дугу кривой линии.

Повторный интеграл – интеграл от функции двух переменных, взятый последовательно по одной переменной, а затем по другой.

Потенциал (потенциальная функция) вектора – функция трех переменных, частные производные которой по соответствующим координатам совпадают с координатами вектора.

Радиус сходимости степенного ряда - положительное число R такое, что внутри интервала (-R,R) ряд сходится, а вне этого интервала ряд расходится. Интервал (-R,R) – интервал сходимости.

Связное множество – множество, любые две точки которого можно соединить непрерывной кривой, принадлежащей этому множеству.

Смешанная частная производная - частная производная высшего порядка функции многих переменных, которая берется по разным переменным.

Степенной ряд - функциональный ряд вида $a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + ... + a_n x^n + ...$

Сумма ряда - предел последовательности частичных сумм.

Точки экстремума функции – точки максимума и минимума функции. Точка x_0 - точка минимума (максимума) функции, если в некоторой окрестности этой точки значения функции меньше (больше) значения функции в точке x_0.

Тройной интеграл – обобщение понятия определенного интеграла на трехмерный случай. Определяется как предел соответствующих интегральных сумм.

Функциональная последовательность – последовательность, члены которой являются функциями.

Функциональный ряд - ряд, члены которого являются функциями.

Функция *n* переменных – функция, которая ставит в соответствие одному числу y набор чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Частичная сумма ряда - сумма конечного числа первых членов ряда.

Частная производная - производная от функции многих переменных, рассматриваемой как функция только от одной переменной при фиксированном значении других переменных.

Частные производные высших порядков – производные от частных производных функции многих переменных, которые также могут являться функциями многих переменных.

Числовой ряд - выражение вида $a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots$, где $a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots$ - числовая последовательность.

Циркуляция вектора – криволинейный интеграл второго рода от векторной функции по замкнутому контуру.

Якобиан – определитель, составленный из частных производных *n* функций, зависящих от *n* переменных.

Для заметок

Подписано в печать 22.04.2012 г. Тираж 100 экз.
Формат изд. 60х84/16. Объем 7 усл. печ. л.

Отпечатано в типографии “ИП Волков А.И.”
Райымбека 212/1, оф. 319. Тел.: 330-03-12, 330-03-13