АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ НЕГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОФСОЮЗОВ»

С.Ж. КАРАТАБАНОВА

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

**задания и методические указания
к их выполнению**

**Алматы
2013**

Автор-составитель:
КАРАТАБАНОВА С.Ж.,
кандидат физико-математических наук, доцент
Алматинского филиала НОУ ВПО
«Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

Рекомендовано к печати
Учебно-методическим советом Алматинского филиала НОУ ВПО
«Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»
от «18» декабря 2013 г. Протокол № 3.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дисциплина «Линейная алгебра» является важной составляющей всего цикла математических дисциплин, поскольку рассматриваемые в ней понятия и методы впоследствии широко применяются в курсах аналитической геометрии, математического анализа, линейного программирования, численных методов, математического моделирования, математической экономики.

Завершив изучение курса, студенты должны приобрести навыки количественных расчетов по заданным схемам, повысить алгоритмическую культуру, развить логическое мышление, сформировать математическую интуицию для самостоятельной формализации и исследования прикладных задач экономики.

Процесс изучения дисциплины направлен на формирование у студента следующих компетенций:

— способность на основе типовых методик и действующей нормативно-правовой базы рассчитать экономические и социально-экономические показатели, характеризующие деятельность хозяйствующих субъектов (ПК-2);

— способность выполнять необходимые для составления экономических разделов планов расчеты, обосновывать их и представлять результаты работы в соответствии с принятыми в организации стандартами (ПК-3);

— способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы (ПК-5);

— способность преподавать экономические дисциплины в образовательных учреждениях различного уровня, используя существующие программы и учебно-методические материалы (ПК-14);

— способность принять участие в совершенствовании и разработке учебно-методического обеспечения экономических дисциплин (ПК-15).

В результате изучения дисциплины студент должен:

Знать: основы линейной алгебры, необходимые для решения экономических задач;

Уметь: формулировать и доказывать основные результаты основных разделов линейной алгебры.

Владеть: навыками решения типовых задач с применением изучаемого теоретического материала для решения экономических задач.

1.МАТРИЦЫ

1.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Таблица чисел (вещественных или комплексных)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

называется прямоугольной матрицей порядка $m \times n$.

Элементы $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$ образуют i-ю строку, а элементы $a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj}$ - j-й столбец матрицы A. Элемент a_{ij} лежит на пересечении i-й строки и j-го столбца матрицы A и мы будем всегда иметь в виду, что первый индекс обозначает номер строки, второй - номер столбца.

В некоторых случаях матрицу (1) удобнее записать в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^m & a_2^m & \dots & a_n^m \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

В данном случае верхний индекс обозначает номер строки, нижний - номер столбца.

Если число строк совпадает с числом столбцов, т.е. $m = n$, то такая матрица называется квадратной матрицей порядка n. В частности при $n = 1$ мы имеем квадратную матрицу, состоящую из одной строки и одного столбца - просто число.

Матрицу, состоящую из одной строки

$$a^1 = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \end{pmatrix},$$

называют матрицей-строкой длины n, а матрицу, состоящую из одного столбца

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \dots \\ a_1^m \end{pmatrix},$$

называют матрицей-столбцом высоты m. Используя приведённые выше обозначения, можно матрицу (2) записать так:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{pmatrix} \text{ или } A = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ \dots \\ a^m \end{pmatrix} \tag{3}$$

В качестве примера матрицы-строки (матрицы-столбца) можно привести упорядоченную пару чисел $\begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

Матрицу A называют нулевой $A = O$, если все её элементы равны нулю.

Например: $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Если строки матрицы B состоят из соответствующих столбцов матрицы A, т.е. $b_{ik} = a_{ki}$, то матрицу B называют транспонированной по отношению к матрице A и обозначают как $B = A^T$. Заметим, что $B^T = \left(A^T\right)^T = A$.

Если A - квадратная матрица, то её элементы $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ образуют главную диагональ матрицы и называются диагональными, а их сумма называется следом матрицы и обозначается как trA или SpA.

Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $trA = 10$.

Если все элементы квадратной матрицы, кроме диагональных, равны нулю, то матрицу называют диагональной.

Например: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Диагональную матрицу, у которой элементы на главной диагонали равны единице, называют единичной матрицей и обозначают как E.

Например: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Пусть $M_{m \times n}$ - множество матриц размера $m \times n$. Определим на этом множестве линейные операции сложения матриц и умножения матрицы на число из поля K.

Суммой двух матриц $A, B \in M_{m\times n}$ называют матрицу $C \in M_{m\times n}$, $C = A + B$, если элементы матрицы C связаны с соответствующими элементами матриц A и B соотношениями $c_{ik} = a_{ik} + b_{ik}$.

Произведением числа $\lambda \in K$ и матрицы $A \in M_{m\times n}$ называют матрицу $B \in M_{m\times n}$, элементы которой определены соотношениями $b_{ik} = \lambda a_{ik}$.

Матрицу $(-1)A = -A$ называют матрицей, противоположной матрице A.

С помощью понятия линейных операций можно из матриц $A_i \in M_{m\times n}$ и чисел $\alpha_i \in K$ составить линейную комбинацию

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k, \tag{4}$$

снова принадлежащую $M_{m\times n}$.

Если какая-то матрица представлена в виде линейной комбинации (4), то можно сказать, что она разложена по матрицам линейной комбинации

$$A = \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k.$$

Нулевая матрица O всегда может быть разложена в линейную комбинацию (4), если положить все $\alpha_i = 0$. Такая комбинация называется тривиальной.

Систему матриц $A_i = M_{m\times n}$ называют линейно независимой, если нулевая комбинация раскладывается по ней однозначно, т.е. если

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + ... + \alpha_k A_k = O, \tag{5}$$

то все $\alpha_i = 0$, в противном случае система называется линейно зависимой.

Строки (столбцы) любой матрицы можно рассматривать как матрицы-строки (матрицы-столбцы). Составляя из них линейные комбинации, мы можем определить их линейную зависимость или независимость.

Для некоторых матриц A и B может быть определено их произведение AB. Это возможно, если число столбцов первой матрицы равно числу строк второй.

Так, если матрица A имеет размеры $m \times n$, а B имеет размеры $n \times q$, то матрица $C = AB$ будет иметь размер $m \times q$, а её элементы будут определены соотношениями

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}, \; i = 1,...,m, \; j = 1,...,q. \tag{6}$$

Следует отметить, что в общем случае $AB \neq BA$, т.е. матрицы A и B не коммутируют.

Над строками (столбцами) матриц можно совершать элементарные преобразования:

а) умножение строки (столбца) на число $\alpha \neq 0$;

б) прибавление одной строки (столбца) к другой строке (столбцу).

Более сложные преобразования, которые могут быть сведены к элементарным преобразованиям:

в) прибавление к одной строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженного на число;

г) вычитание строк (столбцов);

д) перестановка двух строк (столбцов).

Отличие числа α от нуля обеспечивает обратимость элементарных преобразований.

Каждое элементарное преобразование строк (столбцов) матрицы A размеров $m \times n$ равносильно умножению матрицы A слева (справа) на некоторую квадратную матрицу S порядка m (n), причем матрица S не зависит от матрицы A, а полностью определяется выполняемым ею преобразованием. Матрицу S называют элементарной матрицей.

Квадратную матрицу с линейно зависимыми строками (столбцами) называют вырожденной. Примерами вырожденных матриц могут служить матрицы с нулевой строкой или двумя пропорциональными строками. Важными примерами невырожденных матриц могут служить единичная матрица и элементарные матрицы.

С помощью элементарных преобразований каждая невырожденная матрица может быть сведена к единичной, а каждая вырожденная может быть сведена к матрице с последней нулевой строкой.

Каждая невырожденная матрица A имеет обратную матрицу A^{-1} такую, что $AA^{-1} = A^{-1}A = E$. Вырожденная матрица не имеет обратной.

Пусть в матрице A размера $m \times n$ существует линейно независимая система из r строк и нет линейно независимой системы из большего числа строк. В этом случае говорят, что матрица A имеет ранг r:

$RgA = r$.

В матрице A в этом случае найдётся и r линейно независимых столбцов, а значит, и невырожденная квадратная подматрица размера r.

Линейно независимую систему столбцов (строк) матрицы называют базисными столбцами (строками).

Каждый столбец (строка) матрицы раскладывается в линейную комбинацию ее базисных столбцов (строк).

Линейные зависимости между столбцами матрицы не меняются при элементарных преобразованиях строк.

Ранг матрицы не меняется при элементарных преобразованиях матрицы.

Ранг произведения двух матриц не превосходит рангов сомножителей.

Матрица A размеров $m \times n$ называется упрощённой, если некоторые r ее столбцов являются первыми r столбцами единичной матрицы порядка m, а в случае $m > r$ ее последние $m - r$ строк нулевые.

1.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример № 1. Сложить матрицы:

$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 & 3+0 & 5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Пример № 2. Даны матрицы A и B, найти их линейную комбинацию $2A + 4B$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$2A + 4B = 2\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 8 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 12 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 12 & -6 \end{pmatrix}.$$

Пример № 3. Дана матрица A. Какую матрицу B нужно прибавить к данной матрице, чтобы получить единичную матрицу E?

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Искомая матрица может быть определена из уравнения $A + B = E$, или

$$B = E - A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & -5 & -3 \\ -1 & -1 & -4 \\ -3 & -5 & -7 \end{pmatrix}.$$

Пример № 4. Найти матрицу, транспонированную к матрице A.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A^T = \begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix}.$$

Пример № 5. Вычислить произведение матриц:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ и $F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; г) $G = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$, $H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

Так как число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы, то мы можем составить их произведение:

а) $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 & 2 \cdot 0 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \end{pmatrix}$

б) $C \cdot D = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 5 \\ 6 & 0 & 3 & 15 \end{pmatrix}$

в) $E \cdot F = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 3 \cdot 0 & 1 \cdot 1 + 3 \cdot 1 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 + 0 \cdot 0 & 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 & 2 \cdot 0 + 0 \cdot 3 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 9 \\ 4 & 2 & 6 \end{pmatrix}$

г) $G \cdot H = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 6 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 + 4 \cdot 3 & 5 \cdot 0 + 4 \cdot 1 & 5 \cdot 3 + 4 \cdot 2 \\ 6 \cdot 1 + 7 \cdot 3 & 6 \cdot 0 + 7 \cdot 1 & 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2 \end{pmatrix} =$

$= \begin{pmatrix} 17 & 4 & 23 \\ 27 & 7 & 32 \end{pmatrix}$

Заметим, что произведение $H \cdot G$ составить нельзя.

Пример № 6. Установить линейную зависимость или независимость строк (столбцов):

а) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) Составим из данных строк линейную комбинацию, равную нулевой строке:

$$\alpha\ e_1 + \beta\ e_2 + \gamma\ e_3 = O, \qquad (*)$$

или

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

С другой стороны

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \gamma \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \beta & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Линейная комбинация (*) равна нулю лишь при $\alpha = \beta = \gamma = 0$, что говорит о линейной независимости данных матриц строк.

б) Составим нулевую линейную комбинацию матриц A и B : $\alpha\ A + \beta\ B = O$, или

$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\beta & \beta \\ -\beta & \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 2\beta & \alpha + \beta \\ \alpha - \beta & 2\alpha + \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Эта запись равносильна системе из четырёх уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ 2\alpha + \beta = 0 \end{cases},$$

решение которой очевидно: $\alpha = \beta = 0$. Матрицы A и B линейно независимы.

в) Рассмотрим столбцы

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\quad e_3=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Эти столбцы являются линейно независимыми, так как равенство $\alpha e_1+\beta e_2+\gamma e_3=O$ возможно лишь при $\alpha=\beta=\gamma=0$.

$$\alpha\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\0\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$

Откуда сразу следует, что $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Пример № 7. Привести данные матрицы к единичной, используя метод Гаусса-Жордана:

а) $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&2&3\\4&0&5\end{pmatrix}$; б) $E=\begin{pmatrix}3&5&6\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}$; в) $G=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&2&3\\4&0&5\end{pmatrix}$.

Решение:

а) $A=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&2&3\\4&0&5\end{pmatrix}$. Так как на пересечении второй строки и первого столбца стоит 1, удобно будет поменять местами первую и вторую строку. Далее вычтем из третьей строки первую, умноженную на 4. Дальнейший ход решения понятен.

$$A=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&2&3\\4&0&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&-8&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&8&7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&0&5/3\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

б) $E=\begin{pmatrix}3&5&6\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}$. Поступая как и в первом случае, получим:

$$E=\begin{pmatrix}3&5&6\\1&2&1\\2&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\3&5&6\\2&3&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&3\\0&-1&3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&-1&3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&7\\0&1&-3\\0&0&0\end{pmatrix}$$

Мы видим, что в третьей строке стоят одни нули. Это говорит о том, что исходная матрица вырожденная.

в) $$G=\begin{pmatrix}0&3&2\\1&2&3\\4&0&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&2\\4&0&5\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&2\\0&-8&-7\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&8&7\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&0&5/3\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2/3\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=E.$$

Пример № 8. Найти матрицу, обратную данной:

а) $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&2\\1&1&3\end{pmatrix}$.

Решение:

а) Припишем к данной матрице $A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ справа единичную матрицу такого же порядка, в результате чего получим матрицу $B=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)$ размера 2×4. Элементарными преобразованиями строк преобразуем полученную матрицу так, чтобы обратить ее левую половину в единичную, тогда правая половина обратится в матрицу A^{-1}. Для получения решения нам достаточно поменять строки местами:

$$B=\left(\begin{array}{cc|cc}0&1&1&0\\1&0&0&1\end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc|cc}1&0&0&1\\0&1&1&0\end{array}\right).\ A^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

Мы получили, что в данном случае $A^{-1}=A$.

б) Припишем к данной матрице справа единичную матрицу такого же порядка. Элементарными преобразованиями строк приведем данную матрицу в единичную, тогда единичная матрица справа этими же преобразованиями перейдет в обратную к A.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right).$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

ВНИМАНИЕ! Рассмотрим матрицу A порядка n, у которой $|A| \neq 0$. Покажем, что матрица B вида

$$B = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

является обратной к матрице A.

Решение:

Непосредственно вычисляя произведения AB и BA, в соответствии со свойствами определителей убеждаемся, что матрица B обратна к матрице A.

Пример № 9. Найти матрицу X из уравнения:

1. $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение:

Мы имеем уравнение вида $A \cdot X = C$. Если матрица невырождена, то умножив обе части данного равенства слева на A^{-1}, получим: $A^{-1}A \cdot X = A^{-1}C$ или $X = A^{-1}C$.

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, тогда

$$B = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 5 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{array}\right).$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } X=A^{-1}C=\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пример № 10. Привести матрицу к упрощённому виду, определить базисные миноры и ранги. Указать базисные строки и столбцы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение:

При использовании метода Гаусса-Жордана удобно в качестве ведущего элемента взять a_{11}, т.к. он уже равен 1. Умножив первую строку последовательно на -2 и -3, прибавим ее ко второй и третьей строкам соответственно. Вычтя из третьей строки вторую и поменяв местами два последних столбца, получим в верхнем левом углу единичную матрицу второго порядка, являющуюся базисным минором.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг данной матрицы равен 2, а в качестве базисных столбцов и базисных строк можно взять две первые строки и два первых столбца. Третий столбец есть линейная комбинация базисных столбцов: $a_3 = 1\cdot a_1 + 0\cdot a_2$. (В качестве базисных столбцов также можно взять второй и третий столбцы).

Пример № 11. Вычислить ранг матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

В левом верхнем углу мы получили единичную матрицу второго порядка. Таким образом, ранг исходной матрицы $Rg = 2$, первые два столбца (строки) базисные.

1.3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача № 1. Сложить матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 & -3 \end{pmatrix}$;

Задача № 2. Даны матрицы A и B, найти их линейную комбинацию:

а) $4\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} 6 \\ 10 \end{pmatrix}$; б) $5\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2 & 2+2i \\ -i & 3 \end{pmatrix}$; г) $10\begin{pmatrix} 3 & 5 & -7 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 6 & 25 & -7 \end{pmatrix}$.

Задача № 3. Дана матрица A. Какую матрицу B нужно прибавить к данной матрице, чтобы получить единичную матрицу E?

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix}.$$

Задача № 4. Найти матрицу, транспонированную к данной матрице:

а) $\begin{pmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2+3i \\ 3-i \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 0 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача № 5. Вычислить произведение матриц:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; д) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^4$; з) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$; и) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^3$ к) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^n$

Задача №6. Установить линейную зависимость или независимость строк (столбцов):

а) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

б) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$. в) $a = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

г) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача №7. Привести данные матрицы к единичной, используя метод Гаусса-Жордана:

а) $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; в) $D = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача № 8. Найти матрицы, обратные данным:

а) $\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; н) $\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$.

Задача № 9. Найти матрицу X из уравнения:

а) $X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 \\ 17 \end{pmatrix}$;

в) $4X - \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} - 3X = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 5 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} + 2X = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 2 \end{pmatrix} - X = \begin{pmatrix} 5 & 3+2i \\ 5-5i & 5 \end{pmatrix}$.

Задача № 10. Привести матрицы к упрощённому виду, определить базисные миноры и ранги. Указать базисные строки и столбцы.

1. $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$; 3. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; 4. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5. $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача № 11. Вычислить ранг матрицы.

а) $\begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; з) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\end{pmatrix}$;

и) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 3 & 4\\ 3 & 4 & 5\end{pmatrix}$; к) $\begin{pmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{pmatrix}$; л) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 3 & 5 & 4 & 6\end{pmatrix}$;

м) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7\\ 5 & 6 & 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$; н) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1\\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 5 & 12 & 9\\ 4 & 5 & 6 & -3 & 3\end{pmatrix}$;

о) $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 3 & 2 & 1 & 1 & -3 & -2\\ 0 & 1 & 2 & 2 & 6 & 23\\ 5 & 4 & 3 & 3 & -1 & 12\end{pmatrix}$; п) $\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & -1 & 4\\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4\\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12\\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4\end{pmatrix}$;

р) $\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$; с) $\begin{pmatrix}2 & -1 & 2 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 7 & -3 & 2\\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}$.

Задача № 12. Проверить непосредственным вычислением, что $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$, если

а) $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ 2 & 1 & 5\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 5 & 3 & 7\end{pmatrix}$.

Задача № 13. Найти произведения матриц AB и BA, если

а) $A = \begin{pmatrix}1 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 4\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 3\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}$; б) $A = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix}-1 & 8\\ -4 & 7\end{pmatrix}$;

г) $A=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}\cos\beta & -\sin\beta\\ \sin\beta & \cos\beta\end{pmatrix}$.

Задача № 14. Найти A^3, если $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & -1\end{pmatrix}$.

Задача №15. Найти значение матричного многочлена $2A^2+3A+5E$, если $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1\\ 4 & 1 & 1\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Задача №16. Найти значение матричного многочлена A^2+A-E, если $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3\\ 5 & 2 & 0\end{pmatrix}$, $E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Задача №17. Разложить матрицу $C=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & 5\end{pmatrix}$ по матрицам A и B $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Задача №18. Можно ли разложить матрицу $D=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 7 & 9\end{pmatrix}$ по матрицам A и B $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$?

Задача №19. Дать описание всех матриц ранга 0 и 1.

Задача №20. Могут ли существовать матрицы без базисного минора?

Задача №21. Указать базисный минор, базисные строки и базисные столбцы невырожденной квадратной матрицы. Чему равен ранг такой матрицы?

Задача №22. Вычислить ранги матриц A и B и ранги их произведения $A\cdot B$.

а) $A=\begin{pmatrix}2 & 3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$; б) $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 7 & 0\end{pmatrix}$;

в) $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3 & 4 & 0\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$.

2. ПЕРЕСТАНОВКИ

2.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Числа $1,...,n$, написанные в каком либо порядке $(p_1,...,p_n)$, называются перестановкой.

Например, числа 1,2 образуют две перестановки: (1 2) и (2 1). Числа $1,...,n$ образуют очевидно $n!$ перестановок вида $(p_1,...,p_n)$.

Считается, что число p_i нарушает порядок в перестановке $(p_1,...,p_n)$, если оно стоит левее меньшего числа: $i < k$, но $p_k > p_i$.

Например, в перестановке (1 3 2 4) число $p_2 = 3$ стоит перед числом $p_3 = 2$, что нарушает порядок следования натуральных чисел. Явление нарушения порядка следования натуральных чисел называется инверсией. В данном примере имеется одна инверсия. Перестановку называют чётной, если она содержит чётное число инверсий, и нечетной - в противном случае.

2.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример №23. Подсчитать число инверсий и определить чётность перестановки (3 1 5 2 4).

Решение:

Для подсчёта числа инверсий следует подсчитать, сколько для каждого числа имеется следующих за ним меньших его чисел, и сложить найденные значения. Таким образом, для перестановки (3 1 5 2 4) число инверсий будет 2+0+2+0+0=4. Полученное число инверсий четное, значит перестановка (3 1 5 2 4) - чётная.

2.3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача №23. Подсчитать число инверсий и определить чётность перестановки.

а) (3 2 1); б) (6 5 4 2 1 3); в) (6 5 4 2 1 3); г) (1 2 5 7 3 6 4);
д) (8 7 6 5 4 3 2 1); е) (4 3 2 1 5 9 8 7 6); ж) $(n \quad n-1 \quad ... \quad 2 \quad 1)$.

3. ДЕТЕРМИНАНТЫ

3.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Каждой квадратной матрице порядка n можно сопоставить некоторое число, называемое детерминантом матрицы, обозначаемое через $\det A$, $|A|$ или

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (1)$$

Основные формулы для вычисления детерминантов:

$|a| = a$;

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc;$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_3b_1c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 - a_3b_2c_1.$$

Пусть a_{ik} - элемент матрицы A порядка n расположен в i-й строке и k-м столбце. Матрица D_{ik} порядка $n-1$, полученная из A вычёркиванием i-й строки и k-го столбца, называется дополнительной подматрицей этого элемента.

Например:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \end{pmatrix}, \text{ тогда } D_{32} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

получена вычёркиванием в A 3-й строки и 2-го столбца.

Число $d_{ik} = \det D_{ik}$, (2)

называется дополнительным минором элемента a_{ik}.

Например: $d_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 5 & 7 & 8 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} = -16$.

Дополнительный минор d_{ik} элемента a_{ik} матрицы A порядка n, взятый со знаком $(-1)^{i+k}$, называется алгебраическим дополнением A_{ik} элемента a_{ik}.

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} d_{ik}. \tag{3}$$

Рекуррентные формулы:

формула разложения детерминанта по i-й строке

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} d_{ik}, \tag{4}$$

формула разложения детерминанта по j-му столбцу

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{kj} d_{kj}. \tag{5}$$

Свойства детерминантов:

1. При транспонировании матрицы её детерминант не меняется (свойство равноправности строк и столбцов).

2. Если в квадратной матрице поменять местами две строки (столбца), оставив остальные на своих местах, то детерминант полученной матрицы будет равен детерминанту исходной матрицы с противоположным знаком (свойство антисимметрии при перестановке двух строк или столбцов).

3. Если квадратная матрица имеет две одинаковые строки (столбца), то её детерминант равен нулю.

4. Детерминант матрицы A n-го порядка равен сумме произведений всех элементов какой-нибудь одной фиксированной строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

5. Сумма произведений элементов одной строки (столбца) матрицы A n-го порядка на алгебраические дополнения соответствующих элементов другой строки (столбца) равна нулю.

6. Если все элементы какой-нибудь строки (столбца) матрицы n-го порядка умножить на число λ, то её детерминант так же умножится на это число.

7. Если матрица n-го порядка имеет две пропорциональные строки (столбца), то её детерминант равен нулю.

8. Если все элементы i-й строки матрицы n-го порядка представлены в виде суммы двух слагаемых

$$a_{ik} = a'_{ik} + a''_{ik}, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{*}$$

то её детерминант можно представить в виде суммы детерминантов двух матриц, у которых элементами i-й строки являются соответственно первая и вторая слагаемые разложения (*), а все остальные строки – такие же, как у исходной матрицы.

9. Детерминант матрицы n-го порядка не изменится, если к элементам одной её строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и тоже произвольное число.

3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример №24. Вычислить детерминант матрицы второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = 1 - 6 = -5.$$

Пример №25. Вычислить детерминант матрицы третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Решение:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 3 + 5 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 0 \cdot 0 -$$

$$- 2 \cdot 2 \cdot 5 - 1 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot (-1) \cdot 0 = -34$$

Пример №26. Решить относительно неизвестного λ уравнение:

1. $\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

Решение:

$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0$ или $(5-\lambda) \cdot (8-\lambda) - 4 = 0$.

$\lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0$

Решением этого уравнения будут: $\lambda_1 = 4, \quad \lambda_2 = 9$.

Пример №27. Имеются ли в формуле для вычисления детерминанта матрицы пятого порядка $\left|a_{ik}\right|$ слагаемые $a_{32}a_{41}a_{35}a_{23}a_{14}$?

Решение:

Расположим элементы в порядке возрастания первого индекса: $a_{14}a_{23}a_{32}a_{35}a_{41}$.

Мы видим, что элементы a_{32} и a_{35} принадлежат одной строке (третьей) и нет элемента из пятой строки. Такое слагаемое не может входить в формулу для вычисления детерминанта матрицы пятого порядка.

Пример №28. С какими знаками входят в формулу для вычисления детерминанта пятого порядка слагаемые $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$?

Решение:

Расположим сомножители в данном слагаемом так, чтобы первые индексы расположились по порядку номеров, т.е. $a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55}$. Вторые индексы образовали перестановку (2 1 4 3 5), число инверсий которой есть (1+0+1+0+0)=2, число чётное. Данное слагаемое $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$ входит в формулу для вычисления детерминанта пятого порядка со знаком плюс.

Пример №29. Вычислить алгебраические дополнения для элементов a_{23}, a_{13} матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$D_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix},\; d_{23} = \det D_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} d_{23} = (-1)^5 \cdot (-14) = 14.$$

$$D_{13} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix},\; d_{13} = \det D_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 0 \end{vmatrix} = -35,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} d_{13} = (-1)^4 \cdot (-35) = -35.$$

Пример №30. Вычислить детерминант матрицы четвёртого порядка:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение:

Очевидно, что $\det A$ будет линейной функцией от чисел a,b,c,d, в силу чего разложение матрицы лучше всего провести по 2-й строке.

$$\det A = aA_{21}+bA_{22}+cA_{23}+dA_{24}=$$

$$=a(-1)^{2+1}d_{21}+b(-1)^{2+2}d_{22}+c(-1)^{2+3}d_{23}+d(-1)^{2+4}d_{24}=$$

$$=-ad_{21}+bd_{22}-cd_{23}+dd_{24}.$$

$$d_{21}=\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=-9, \qquad d_{22}=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=12,$$

$$d_{23}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}=9, \qquad d_{24}=\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3.$$

$$\det A=9a+12b-9c+3d.$$

3.3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача №24. Вычислить детерминанты матриц второго порядка:

а) $B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$; в) $D=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $E=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$; д) $F=\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$;

е) $G=\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; ж) $H=\begin{pmatrix} 1 & e^{x} \\ e^{-x} & 1 \end{pmatrix}$.

Задача №25. Вычислить детерминанты матриц третьего порядка:

а) $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$; б) $C=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; в) $D=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $E=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$; д) $F=\begin{pmatrix} 1 & 3 & i \\ 3 & 0 & -2i \\ -i & 2i & 1 \end{pmatrix}$; е) $G=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$;

ж) $H = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Задача №26. Решить относительно неизвестного λ уравнения:

а) $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 0 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$; б) $\begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$; в) $\begin{vmatrix} 25-\lambda & 60 \\ 60 & 144-\lambda \end{vmatrix} = 0$.

Задача №27. Имеются ли в формуле для вычисления детерминанта матрицы пятого порядка $|a_{ik}|$ слагаемые

а) $a_{15}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$; б) $a_{55}a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}$; в) $a_{11}a_{22}a_{33}a_{24}a_{55}$?

Задача №28. С какими знаками входят в формулу для вычисления детерминанта пятого порядка слагаемые

а) $a_{12}a_{21}a_{34}a_{45}a_{53}$; б) $a_{15}a_{23}a_{34}a_{41}a_{52}$; в) $a_{12}a_{23}a_{34}a_{45}a_{51}$?

Задача №29. Вычислить алгебраические дополнения для элементов a_{23}, a_{32}, a_{21}, a_{13} матриц

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача №30. Вычислить детерминанты матриц четвёртого порядка:

а) $B = \begin{pmatrix} a & 7 & 0 & 3 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 1 & 2 & c & 4 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}$; б) $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $D = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 5 & 6 \\ 1 & -1 & 7 & 6 \\ 1 & -2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$; д) $F = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -2 & -5 \\ 2 & 5 & 4 & 6 \\ 5 & 5 & 8 & 7 \\ 4 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$;

е) $G=\begin{pmatrix}3 & -2 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3 & 1\\ 1 & 0 & 2 & -2\\ 1 & 1 & 3 & 2\end{pmatrix}$; ж) $H=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2 & x\\ 1 & 3 & 1 & y\\ 3 & 1 & 1 & z\\ 1 & 1 & 1 & t\end{pmatrix}$;

з) $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 2 & 5 & 9\\ 0 & 0 & 3 & 7\\ -2 & -4 & -6 & 1\end{pmatrix}$; и) $N=\begin{pmatrix}2 & 3 & -4 & 5\\ 3 & -5 & 2 & 4\\ 5 & 4 & 3 & -2\\ -4 & 2 & 5 & 3\end{pmatrix}$;

к) $O=\begin{pmatrix}1+2a & 1 & a & x\\ 1+2b & 2 & b & x\\ 1+2c & 3 & c & x\\ 1+2d & 4 & d & x\end{pmatrix}$; л) $P=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ -1 & 0 & 3 & 4\\ -1 & -2 & 0 & 4\\ -1 & -2 & -3 & 0\end{pmatrix}$.

Задача №31. Вычислить детерминанты матриц пятого порядка:

а) $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 5 & 5 & 5\\ 3 & 4 & 6 & 6 & 6\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$; б) $B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3\end{pmatrix}$;

в) $C=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 4 & 9 & 16 & 25\end{pmatrix}$; г) $D=\begin{pmatrix}0 & 7 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 4 & 3 & 9 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5 & 0\\ 2 & 8 & 4 & 7 & 5\\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

Задача №32. Как изменится детерминант, если в матрице переставить две строки?

Задача №33. Как изменится детерминант, если к одной строке матрицы прибавить другую её строку?

Задача №34. Как изменится детерминант, если одну строку в матрице умножить на число λ?

Задача №35. Как изменится детерминант, если матрицу транспонировать?

Задача №36. Числа 1313, 1599, 1703, 3263 делятся на 13. Объяснить без вычислений, почему число

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 9 & 9 \\ 1 & 7 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 6 & 3 \end{vmatrix}$$

тоже делится на 13?

4. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

4.1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Система уравнений вида

$$\begin{cases} a_1^1 x^1 + a_2^1 x^2 + \ldots + a_n^1 x^n = b^1 \\ a_1^2 x^1 + a_2^2 x^2 + \ldots + a_n^2 x^n = b^2 \\ \qquad\qquad\ldots \\ a_1^m x^1 + a_2^m x^2 + \ldots + a_n^m x^n = b^m \end{cases} \qquad (1)$$

называется системой m линейных уравнений с n неизвестными $x^1, x^2, \ldots, x^n$.

Коэффициенты при неизвестных из уравнений (1) можно записать в виде матрицы размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m \end{pmatrix},$$

которую называют матрицей системы. Числа, стоящие в правых частях (1), образуют матрицу-столбец:

$$b = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \ldots \\ b^m \end{pmatrix},$$

называемую столбцом свободных коэффициентов.

Матрица системы, дополненная справа матрицей свободных коэффициентов, называется расширенной матрицей системы (1), и обозначается A^*:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_1^1 & a_2^1 & \ldots & a_n^1 & b^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \ldots & a_n^2 & b^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_1^m & a_2^m & \ldots & a_n^m & b^m \end{array}\right),$$

или

$$A^* = \left(A \mid b\right).$$

Пользуясь понятием линейных операций со столбцами, можно записать (1) как

$$x^1 \cdot \begin{pmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ \dots \\ a_1^m \end{pmatrix} + x^2 \cdot \begin{pmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ \dots \\ a_2^m \end{pmatrix} + \dots + x^n \cdot \begin{pmatrix} a_n^1 \\ a_n^2 \\ \dots \\ a_n^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \dots \\ b^m \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$x^1 a_1 + x^2 a_2 + \dots + x^n a_n = b, \tag{3}$$

$$x^i a_i = b, \ \ i = 1,\dots,n, \tag{4}$$

$$A \cdot x = b. \tag{5}$$

Равенства (2) - (5) говорят о том, что столбец свободных коэффициентов b раскладывается по столбцам a_i матрицы A с коэффициентами x^i. При этом, если столбцы матрицы A линейно независимы, то система (1) не может иметь двух различных решений: она или несовместна (не имеет решений), или совместна - имеет решение и притом только одно.

Система линейных уравнений (1) совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы A системы равен рангу расширенной матрицы $A^* = \left(A \mid b\right)$ **(**Теорема Кронекера-Капелли**)**.

При этом, если $RgA = RgA^* = r$, возможны два случая:

1. $r = n$, т.е. число неизвестных равно числу уравнений и $\det A \neq 0$, система имеет единственное решение, т.е. она совместная и определённая.

2. $r < n$, система совместная и неопределённая.

Если $RgA^* > RgA$ - система (1) несовместная.

Если в системе (1) все свободные коэффициенты b^i равны нулю, т.е.

$$A \cdot x = O, \tag{6}$$

то такая система называется однородной системой.

Очевидно, что однородная система совместна всегда, её решением будет, например, нулевая матрица-столбец $x = O$. Такое решение называется тривиальным. Если ранг матрицы A при этом равен n, тогда (6) имеет единственное тривиальное решение и других решений нет. Если $RgA < n$, то система (6) будет совместной, но неопределённой, т.е. будет иметь бесконечно много решений. Если система (6) имеет нетривиальные решения, то можно выбрать несколько линейно независимых решений, таких, что любое решение (6) будет их линейной комбинацией. Из линейно независимых решений можно составить матрицу F высоты n, которая называется фундаментальной матрицей системы (6). При этом выполняется равенство:

$A \cdot F = O$.

Если ранг матрицы однородной системы линейных уравнений $r < n$, то система имеет фундаментальную матрицу из $(n - r)$столбцов.

Если x_0 - некоторое частное решение системы (1), а F - фундаментальная матрица системы (6), тогда общее решение (1) равно

$$x = x_0 + F \cdot c, \tag{7}$$

где $f_1, f_2, ..., f_{n-r}$ - столбцы фундаментальной матрицы системы (6), а $c^1, c^2, ..., c^{n-r}$ - произвольные постоянные:

$$x = x_0 + c^1 f_1 + c^2 f_2 + ... + c^{n-r} f_{n-r}.$$

4.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример №37. Решить систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 = 4 \\ x^1 + 5x^2 + 5x^3 - 4x^4 = -4 \\ x^1 + 8x^2 + 7x^3 - 7x^4 = -8 \end{cases}$; б) $\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 - x^4 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^3 + 2x^4 = 4 \\ x^1 + 5x^2 + 5x^3 - 4x^4 = -4 \\ x^1 + 8x^2 + 7x^3 - 7x^4 = 6 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 7 \\ x^1 - x^2 - x^3 + 3x^5 = 8 \\ 2x^1 + x^4 + 4x^5 = 15 \\ x^1 + 3x^2 + 3x^3 + 2x^4 - x^5 = 6 \end{cases}$

Решение:

а) Мы не будем вычислять ранги матриц A и $A*$ по отдельности. Для решения поставленной задачи составим расширенную матрицу и упростим её с помощью элементарных преобразований.

$$A^* = (A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 6 & 4 & -6 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 5/3 & 1 & 8/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & -1 & -4/3 \end{array}\right)$$

Видно, что $RgA^* = RgA = r = 2$ и $n - r = 2$. Данная система уравнений в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли совместная и неопределённая. Первые два столбца полученной матрицы образуют базисный минор. Соответствующие неизвестные x^1 и x^2 будут базисными неизвестными. Неизвестные x^3 и x^4, соответствующие второму и третьему столбцам, называются свободными: они могут принимать произвольные значения, обеспечивая множество решений. Исходную систему уравнений можно записать теперь так:

$$\begin{cases} x^1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x^3 - x^4 \\ x^2 = -\frac{3}{4} - \frac{2}{3}x^3 + x^4 \end{cases},$$

где x^3 и x^4 - произвольные числа.

б) Составим расширенную матрицу и, переставив местами вторую и третью строки, упростим её:

$$A^* = \left(A \mid b\right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 5 & 5 & -4 & -4 \\ 1 & 8 & 7 & -7 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Последняя строка равносильна записи:

$0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^4 = 1$ или 0=1,

что невозможно и, таким образом, мы имеем несовместную систему уравнений.

Рассмотрим решение поставленной задачи с точки зрения теоремы Кронекера-Капелли: $RgA^* = 3 > RgA = 2$. Система уравнений несовместна.

На основании этого примера можно предположить, что если в упрощённой расширенной матрице есть строка $\left(0 \quad 0 \quad \ldots \quad 0 \mid 1\right)$, то система уравнений будет несовместной.

в) Составим расширенную матрицу B и с помощью элементарных преобразований строк упростим ее:

$$B = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 8 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 4 & 15 \\ 1 & 3 & 3 & 2 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 1 & -2 & -2 & -1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 7\\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c}1 & 0 & 0 & 1/2 & 2 & 15/2\\ 0 & 1 & 1 & 1/2 & -1 & -1/2\end{array}\right)$$

Упрощенная расширенная матрица эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases}x^1 = \frac{15}{2} - \frac{1}{2}x^4 - 2x^5\\ x^2 = -\frac{1}{2} - x^3 - \frac{1}{2}x^4 + x^5\end{cases}.$$

Здесь x^1 и x^2 - базисные переменные, а x^3, x^4 и x^5 - любые числа.

Пример №38. Найти фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases}3x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 2x^4 = 0\\ 5x^1 + 7x^2 + 4x^3 + 3x^4 = 0\\ 4x^1 + 5x^2 + 5x^3 + 3x^4 = 0\\ 5x^1 + 6x^2 + 7x^3 + 4x^4 = 0\end{cases}$$

Решение:

В данном случае ранг расширенной матрицы A^* совпадает с рангом матрицы коэффициентов системы A.

Вычтем из второй строки матрицы A третью и поменяем её местами с первой строкой:

$$A = \begin{pmatrix}3 & 4 & 3 & 2\\ 5 & 7 & 4 & 3\\ 4 & 5 & 5 & 3\\ 5 & 6 & 7 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & -2 & 6 & 2\\ 0 & -3 & 9 & 3\\ 0 & -4 & 12 & 4\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 5 & 2\\ 0 & 1 & -3 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

В верхнем левом углу мы получили базисный минор второго порядка, следовательно $RgA = 2$ и в качестве базисных неизвестных мы возьмём x^1 и x^2, свободные неизвестные x^3 и x^4 могут принимать любые значения. Перепишем исходную систему в соответствии с упрощённой матрицей:

$$\begin{cases}x^1 = -5x^3 - 2x^4\\ x^2 = 3x^3 + x^4\end{cases} \tag{*}$$

Мы можем неизвестным x^3 и x^4 придать любые значения, но для получения фундаментальной системы решений мы должны позаботиться об их линейной независимости. Этого легко достичь, если из всего множества значений свободных неизвестных выбрать простейшие значения 0 и 1 так, чтобы в фундаментальной матрице F в последних $n-r$ строках получилась единичная матрица.

Итак, положим сначала $x^3=1$, а $x^4=0$, тогда из (*) имеем $x^1=-5$, $x^2=3$ и первое фундаментальное решение есть

$(-5 \quad 3 \quad 1 \quad 0)^T$.

Полагая теперь $x^3=0$, а $x^4=1$, получим $x^1=-2$, $x^2=1$ и второе фундаментальное решение $(-2 \quad 1 \quad 0 \quad 1)^T$.

Теперь мы можем записать фундаментальное решение данной однородной системы линейных уравнений в виде:

$$X = F\cdot c = \begin{pmatrix} -5 & -2 \\ 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot c^1 + \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot c^2.$$

Здесь c^1 и c^2 - произвольные числа. Таким образом, мы видим, что для любых значений c^1 и c^2 соответствующее решение будет линейной комбинацией фундаментальных решений.

Пример №39. Найти общее решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x^1 - x^2 + x^3 - x^4 = 4 \\ x^1 + x^2 + 2x^3 + 3x^4 = 8 \\ 2x^1 + 4x^2 + 5x^3 + 10x^4 = 20 \\ 2x^1 - 4x^2 + x^3 - 6x^4 = 4 \end{cases}$ б) $3x - y = -4$

Решение:

а) Будем искать общее решение данной системы линейных уравнений в виде:

$X = X_0 + F\cdot c$,

где X_0 - частное решение данной системы уравнений;

F - матрица, составленная из столбцов фундаментальной системы решений однородной системы;

c - матрица-столбец высоты $n-r$ произвольных чисел.

Составим расширенную матрицу A^* данной системы и упростим её:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 4 & 5 & 10 & 20 \\ 2 & -4 & 1 & -6 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 6 & 3 & 12 & 12 \\ 0 & -2 & -1 & -4 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 3/2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 1/2 & 2 & 2 \end{array}\right).$$

Упрощённая расширенная матрица показывает, что $RgA^* = RgA = 2,\ \ n-r=2,\ \ n<r$. Это значит, что в соответствии с теоремой Кронекера-Капелли данная система уравнений совместная и неопределённая. Упрощённая расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x^1 + \dfrac{3}{2}x^3 + x^4 = 6 \\ x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + 2x^4 = 2 \end{cases}, \qquad (*)$$

эквивалентной данной. Здесь x^1 и x^2 - базисные неизвестные, а x^3 и x^4 - свободные неизвестные, и (*) можно переписать так:

$$\begin{cases} x^1 = 6 - \dfrac{3}{2}x^3 - x^4 \\ x^2 = 2 - \dfrac{1}{2}x^3 - 2x^4 \end{cases} \qquad (**)$$

В качестве частного решения возьмём простейшее из решений системы (**), а именно, положим $x^3 = x^4 = 0$. Тогда $x^1 = 6$, а $x^2 = 2$ и частное решение есть $X_0 = (6 \quad 2 \quad 0 \quad 0)^T$.

Для нахождения фундаментальной системы решений составим из (*) однородную систему, соответствующую левой части упрощённой расширенной матрицы:

$$\begin{cases} x^1 + \dfrac{3}{2}x^3 + x^4 = 0 \\ x^2 + \dfrac{1}{2}x^3 + 2x^4 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x^1 = -\dfrac{3}{2}x^3 - x^4 \\ x^2 = -\dfrac{1}{2}x^3 - 2x^4 \end{cases}$$

Полагая $x^3 = 1,\ x^4 = 0$ и затем $x^3 = 0,\ x^4 = 1$, находим систему из двух фундаментальных решений:

$f_1 = \begin{pmatrix} -3/2 & -1/2 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$ и $f_2 = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Общее решение данной системы линейных уравнений будет:

$$X = X_0 + F \cdot c = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3/2 & -1 \\ -1/2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \end{pmatrix}.$$

б) $3x - y = -4$.

Мы имеем всего лишь одно уравнение с двумя неизвестными, которое тем не менее, можно рассматривать как систему линейных уравнений. Будем искать общее решение также, как и в п.а).

$A^* = \left(3 \quad -1 \;\vdots\; -4\right) \sim \left(1 \quad -1/3 \;\vdots\; -4/3\right)$

или

$$x = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}y$$

$RgA^* = RgA = 1, \quad n - r = 1.$

Частное решение будет $X_0 = \begin{pmatrix} -4/3 & 0 \end{pmatrix}^T$, фундаментальное - $f_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \end{pmatrix}^T$.

Общее решение данной системы будет

$$X = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot c.$$

Дадим геометрическое истолкование полученного решения. Очевидно, что записав данное уравнение как $y = 3x + 4$, мы получим уравнение прямой вида $y = kx + b$. Частное решение $X_0 = \begin{pmatrix} -4/3 & 0 \end{pmatrix}^T$ мы можем рассматривать как координаты начальной точки данной прямой, а $f = \begin{pmatrix} 1/3 & 1 \end{pmatrix}^T$ как компоненты направляющего вектора. Прямая $y = 3x + 4$ проходит через точку $X_0\begin{pmatrix} -4/3 & 0 \end{pmatrix}$ параллельно вектору $\vec{f} = \dfrac{1}{3} \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j}$.

Пример №40. Система линейных уравнений задана в виде линейного матричного уравнения. Найти неизвестную матрицу X .

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Решение:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 2 & 7 & 9 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Запишем данное уравнение в общем виде: $A_{2\times 3} \cdot X = B_{2\times 2}$. Исходя из правил умножения матриц видно, что матрица X в данном случае не матрица-столбец, а матрица размеров 3×2, т.е.

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix},$$

где, как мы договорились ранее, индекс стоящий вверху обозначает номер строки, а индекс стоящий внизу обозначает номер столбца.

Данное линейное матричное уравнение можно рассматривать как две системы линейных уравнений: первой системе принадлежит первый столбец матрицы X и первый столбец матрицы B; второй системе принадлежат соответственно вторые столбцы указанных матриц. Матрица коэффициентов A у обеих систем одна и та же.

Будем искать решение поставленной задачи по известной нам схеме. Составим расширенную матрицу A^* и с помощью элементарных преобразований строк упростим её:

$$A^* = \left(A \mid B\right) = \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 3 & 7 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 9 & 0 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c|c} 1 & 0 & 22 & 14 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & -4 & 0 \end{array}\right).$$

Упрощённая расширенная матрица говорит о том, что $RgA^* = RgA = 2,\ \ n - r = 1,\ \ n < r$. Это значит, что в соответствии с теоремой

Кронекера-Капелли данная система уравнений совместная и неопределённая. Упрощённая расширенная матрица соответствует системе уравнений

$$\begin{cases} x_1^1 + 22x_1^3 = 14 \\ x_1^2 - 5x_1^3 = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^1 + 22x_2^3 = 1 \\ x_2^2 - 5x_2^3 = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x_1^1 = 14 - 22x_1^3 \\ x_1^2 = -4 + 5x_1^3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2^1 = 1 - 22x_2^3 \\ x_2^2 = 5x_2^3 \end{cases}$$

Здесь x_1^3 и x_2^3 - свободные неизвестные, а x_1^1, x_1^2 и x_2^1, x_2^2 - базисные неизвестные. Полагая $x_1^3 = \alpha$, $x_2^3 = \beta$, где α и β - произвольные числа, запишем решение данной системы в виде:

$$x_1^1 = 14 - 22\alpha, \quad x_1^2 = -4 + 5\alpha, \quad x_1^3 = \alpha;$$

$$x_2^1 = 1 - 22\beta, \quad x_2^2 = 5\beta, \quad x_2^3 = \beta.$$

Окончательно можно записать:

$$X = \begin{pmatrix} 14 - 22\alpha & 1 - 22\beta \\ -4 + 5\alpha & 5\beta \\ \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 2 & 7 & 4 \\ 2 & 9 & 8 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ или $A_{3\times3} \cdot X = B_{3\times2}$.

Матрица X должна иметь вид

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_2^1 \\ x_1^2 & x_2^2 \\ x_1^3 & x_2^3 \end{pmatrix}$$

Мы снова имеем две системы линейных уравнений с тремя неизвестными. В соответствии с решением, приведённом выше, имеем:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 1 & 1 \\ 2 & 9 & 8 & 3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c:c} 1 & 4 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -6 \end{array}\right).$$

Мы видим, что в упрощённой расширенной матрице есть строка $(0 \quad 0 \quad 0 \mid 6)$, а значит для системы со вторым столбцом матрицы B решений нет, значит нет решений и для матричного уравнения в целом.

в) Для решения надо исходное уравнение $X \cdot A = B$ переписать, используя операцию транспонирования:

$(X \cdot A)^T = B^T$ или $A^T \cdot X^T = B^T$.

г) Для решения исходное уравнение $A \cdot X \cdot B = C$ следует представить в виде $A \cdot Y = C$, где $X \cdot B = Y$ или $B^T \cdot X^T = Y^T$.

Пример №41. Решить системы уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 5x + 4y = 17 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 11 \\ x + 2y - 3z = -4 \\ 3 - y - 2z = -5 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - 3y + z = -1 \\ x + 2y - z = 2 \end{cases}$.

Решение:

а) Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

и вычислим её детерминант

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 8 - (-15) = 23 \neq 0.$$

Так как $|A| \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение. Вычислим детерминанты матриц A_x и A_y.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ 17 & 4 \end{vmatrix} = -28 - 51 = 23,$$

$$|A_y| = \begin{vmatrix} 2 & -7 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} = 34 - (-35) = 69.$$

Тогда, $x = \dfrac{|A_x|}{|A|} = \dfrac{23}{23} = 1$, $y = \dfrac{|A_y|}{|A|} = \dfrac{69}{23} = 3$.

б) Составим матрицу из коэффициентов при неизвестных

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

и вычислим её детерминант

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -28 \neq 0.$$

Так как $|A| \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение. Вычислим детерминанты матриц A_x, A_y и A_z.

$$|A_x| = \begin{vmatrix} 11 & -3 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -28, \quad |A_y| = \begin{vmatrix} 2 & 11 & 5 \\ 1 & -4 & -3 \\ 3 & -5 & -2 \end{vmatrix} = -56,$$

$$|A_z| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 11 \\ 1 & 2 & -4 \\ 3 & -1 & -5 \end{vmatrix} = -84$$

Тогда,

$$x = \frac{|A_x|}{|A|} = \frac{-28}{-28} = 1, \; y = \frac{|A_y|}{|A|} = \frac{-56}{-28} = 2, \; z = \frac{|A_z|}{|A|} = \frac{-84}{-28} = 3.$$

в) Найдем определитель матрицы коэффициентов:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Так как число уравнений равно числу неизвестных и определитель системы не равен нулю, мы можем для нахождения неизвестных воспользоваться формулами Крамера.

$$\Delta^{ч} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -3, \qquad x = \frac{\Delta^x}{|A|} = \frac{-3}{-3} = 1.$$

$$\Delta^y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -6, \qquad y = \frac{\Delta^y}{|A|} = \frac{-6}{-3} = 2.$$

$$\Delta^z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -9, \qquad z = \frac{\Delta^z}{|A|} = \frac{-9}{-3} = 3.$$

4.3. ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

Задача №37. Решить систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 3x^1 + 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 3 \\ 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 = 1 \\ 5x^1 + 9x^2 - 2x^3 + 2x^4 = 9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 5x^1 + x^2 - 3x^3 = -6 \\ 2x^1 - 5x^2 + 7x^3 = 9 \\ 4x^1 + 2x^2 - 4x^3 = -7 \\ 5x^1 - 2x^2 + 2x^3 = 1 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 5x + 8y + 6z = 7 \\ 3x + 5y + 4z = 5 \\ 7x + 9y + 4z = 1 \end{cases}$

Задача №38. Найти фундаментальную систему решений:

а) $\begin{cases} 3x^1 + 5x^2 + 2x^3 + 4x^4 = 0 \\ 5x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 5x^4 = 0 \\ 9x^1 + 2x^2 + 5x^3 + 7x^4 = 0 \\ 5x^1 - 9x^2 + 2x^3 = 0 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 3x^1 + 3x^2 + 5x^3 + 7x^4 + 4x^5 = 0 \\ 2x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 3x^5 = 0 \\ 4x^1 + 4x^2 + 7x^3 + 9x^4 + 5x^5 = 0 \\ 5x^1 + 5x^2 + 9x^3 + 11x^4 + 6x^5 = 0 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} x^1 + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + x^5 = 0 \\ 3x^1 + 4x^2 + 5x^3 + x^4 + 2x^5 = 0 \\ x^1 + 3x^2 + 5x^3 + 12x^4 + 9x^5 = 0 \\ 4x^1 + 5x^2 + 6x^3 - 3x^4 + 3x^5 = 0 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x^1 + x^2 - x^3 - x^4 = 0 \\ x^1 - x^2 + x^3 + x^4 = 0 \end{cases}$

Задача №39. Найти общее решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} x^1 + 3x^2 + 3x^3 + 5x^4 = -1 \\ 2x^1 + 6x^2 + 5x^3 + 6x^4 = 1 \\ 3x^1 + 7x^2 + 4x^3 + 8x^4 = 2 \\ 3x^1 + 5x^2 + x^3 + 9x^4 = 1 \end{cases}$;

б) $\begin{cases} 2x^1 + 3x^2 + 4x^3 + 3x^4 = 0 \\ 4x^1 + 6x^2 + 9x^3 + 8x^4 = -3 \\ 6x^1 + 9x^2 + 9x^3 + 4x^4 = 8 \end{cases}$;

в) $\begin{cases} 5x^1 + 3x^2 + 4x^3 - 2x^4 + 3x^5 = 1 \\ 8x^1 + 5x^2 + 5x^3 - 2x^4 + 4x^5 = 2 \\ 7x^1 + 4x^2 + 7x^3 - 3x^4 + 7x^5 = -1 \\ 4x^1 + 3x^2 - x^3 - 3x^4 - 2x^5 = 4 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = 7 \\ 3x^1 + 2x^2 + x^3 + x^4 - 3x^5 = -2 \\ x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 6x^5 = 23 \\ 5x^1 + 4x^2 + 3x^3 + 3x^4 - x^5 = 12 \end{cases}$;

д) $2x - y + 2z = -9$

е) $\begin{cases} x - y + 2z = -4 \\ -2x + y + z = -3 \end{cases}$

Задача №40. Система линейных уравнений задана в виде линейного матричного уравнения. Найти неизвестную матрицу X.

а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 8 & 5 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 4 & 3 \\ 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 8 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$; г) $X \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 & 6 \\ 5 & 4 & 7 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 9 & 7 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 & 7 \\ 8 & 9 & 6 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача №41. Решить системы линейных уравнений методом Крамера:

а) $\begin{cases} 3x + 7y = -11 \\ 5x - 2y = 9 \end{cases}$; б) $\begin{cases} 9x - 2y = 41 \\ 7x + 4y = -7 \end{cases}$; в) $\begin{cases} 7x + 4y = -7 \\ x - 3y = -1 \end{cases}$;

г) $\begin{cases} x+2y+3z=-7 \\ 2x+y+2z=-2 \\ 3x+2y+z=3 \end{cases}$; д) $\begin{cases} x+3y-6z=12 \\ 3x+2y+5z=-10 \\ 2x+5y-3z=6 \end{cases}$

Задача №42. При каких параметрах a система уравнений совместна?

$$\begin{cases} x+y+2z=-3 \\ 3x+2y+4z=a \\ 5x+3y+6z=a^2 \end{cases}$$

Задача №43. При каких a система уравнений совместная и определённая?

$$\begin{cases} x+2y+(a-1)z=4 \\ 3x+7y+a^2z=-3 \\ 4x+9y+a^3z=-a \end{cases}$$

Задача №44. Найти решение системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 2x^1+x^2+x^3=2 \\ x^1+3x^2+x^3=5 \\ x^1+x^2+5x^3=-7 \\ 2x^1+3x^2-3x^3=14 \end{cases}$

б) $\begin{cases} 2x^1-x^2+x^3-x^4=1 \\ 2x^1-x^2-3x^4=2 \\ 3x^1-x^3+x^4=-2 \\ 2x^1+2x^2-2x^3+5x^4=-6 \end{cases}$

Задача №45. Система линейных уравнений задана расширенной матрицей. Составить систему линейных уравнений явно и найти общее решение.

а) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$; б) $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -7 & -3 & -3 \\ -5 & 4 & 63 & 29 & 71 \\ 5 & 24 & -7 & 1 & 41 \end{array}\right)$;

в) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 & 3 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right)$;

г) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 20 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & -2 \\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 42 \end{array}\right)$;

д) $\left(\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$.

5. ЗАДАНИЯ ДЛЯ КОНТРОЛЯ

№ варианта	**Задачи**				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	5а	8д	30а	37а	38а
2	5б	8е	30б	37б	38б
3	5в	8ж	30в	37в	38в
4	5г	8з	30г	38г	42
5	5д	8и	30д	40а	43
6	5е	8к	30е	44а	45а
7	5ж	8л	30ж	44б	45б
8	5з	8м	30з	41в	45в
9	5и	8н	30и	41г	45г
10	5к	19	30л	41д	45д

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Кремер Н.Ш. Высшая математика для экономического бакалавриата: учебник и практикум. - М.: Юрайт, 2012. – 909 с.
2. Шипачев В.С. Высшая математика. - М.: Высшая школа, 2012.
3. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике: Учеб. пос. для студентов вузов. - М.: Наука, 2012.

Подписано в печать 18.01.2014 г. Тираж 500 экз.
Формат изд. 60х84/16. Объем 3 усл. печ. л.

Отпечатано в типографии “ИП Волков А.И.”
Райымбека 212/1, оф. 319. Тел.: 330-03-12, 330-03-13