АЛМАТИНСКИЙ ФИЛИАЛ НЕГОСУДАРСТВЕННОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО
УЧРЕЖДЕНИЯ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГУМАНИТАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ПРОФСОЮЗОВ»

С.Ж. КАРАТАБАНОВА, А.К. САРБАСОВА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА

**ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ**

**Алматы
2014**

Авторы-составители:
КАРАТАБАНОВА С.Ж.,
кандидат физико-математических наук,
доцент Алматинского филиала НОУ ВПО
«Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

САРБАСОВА А.К.,
кандидат физико-математических наук,
доцент Алматинского филиала НОУ ВПО
«Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»

Рекомендовано к печати
Учебно-методическим советом Алматинского филиала НОУ ВПО
«Санкт-Петербургский Гуманитарный университет профсоюзов»
от «16» апреля 2014 г. Протокол № 5.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Дискретная математика – область современной математики, занимающаяся изучением свойств дискретных структур, которые имеют место в многочисленных приложениях. В частности, дискретная математика является базой для изучения компьютерных и информационных технологий (теоретическая информатика, теория алгоритмов, теория кодирования, создание прикладного математического и программного обеспечения), для решения экономических задач (комбинаторный анализ, теория графов, решение многоэкстремальных задач), для дискретного имитационного моделирования и пр.

Цель данного курса - овладение знаниями по дисциплине «Дискретная математика», предусмотренными типовыми образовательными программами. Основная задача - развитие навыков использования полученных знаний по дисциплине «Дискретная математика» в дальнейшей профессиональной деятельности. Дисциплина «Дискретная математика» относится к базовой части математического и естественнонаучного цикла образовательной программы направления подготовки «Прикладная информатика».

Требования к результатам освоения дисциплины:

Процесс изучения данной дисциплины направлен на формирование следующих основных ***компетенций***:

- способность при решении профессиональных задач анализировать социально-экономические проблемы и процессы с применением методов системного анализа математического моделирования (ПК-2);
- способность ставить и решать прикладные задачи с использованием современных информационно-коммуникационных технологий (ПК-4);
- способность использовать современные методы и модели оценки качества и надежности при проектировании, разработке и отладке программных средств (ПК-7);
- способность моделировать и проектировать структуры данных, прикладные и информационные процессы (ПК-9);
- способность применять к решению прикладных задач базовые алгоритмы обработки информации, выполнять оценку сложности алгоритмов, программировать и тестировать программы (ПК-10);
- способность применять методы анализа проблем на концептуальном, логическом, математическом и алгоритмическом уровнях (ПК-17);
- аналитическая, научно-исследовательская деятельность.

МНОЖЕСТВА И ОПЕРАЦИИ НАД НИМИ

Основным (неопределяемым) понятием теории множеств является понятие ***множества***. «Множество есть многое, мыслимое нами как единое» (Г.Кантор). Синонимами слова «множество» являются слова «совокупность», «набор», «семейство».

Объекты, из которых состоит множество, называются его ***элементами***.

Множества обозначают большими буквами латинского алфавита $A, B, C \ldots$, элементы множеств – малыми буквами $a, b, c \ldots$ того же алфавита.

Запись $a \in A$ читают: «*a* является элементом множества *A*» или «*a* ***принадлежит*** множеству *A*».

Для наглядности множества изображают в виде геометрических фигур: кругов, овалов, прямоугольников и т.д. Такие рисунки называют ***диаграммами Эйлера-Венна***.

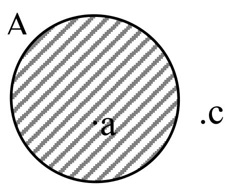


Рис.1

Так, на рис.1 буквой *A* обозначено множество, элементами которого являются точки заштрихованной части плоскости, при этом $a \in A$, $c \notin A$.

Множества задаются двумя способами:

1. Перечислением всех элементов.
2. Указанием характеристического свойства.

Например, $A = \{a, b, c\}$, $B = \{-1, 3, 6, 8\}$, $C = \{x \in Z \quad и \quad -1 \le x \le 4\}$ или $C = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4\}$.

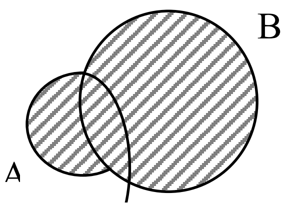
Говорят, что множество A включено в множество B, и обозначают $A \subset B$, если каждый элемент множества A является элементом множества B (говорят также, что A – ***подмножество*** множества B).

Два множества A и B называются ***равными,*** если каждый элемент множества A является элементом множества B и каждый элемент множества B является элементом множества A, т.е. $A = B \Leftrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$.

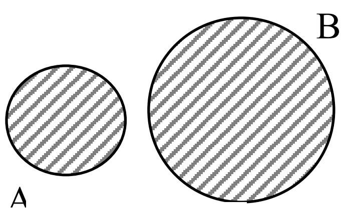
Объединением множеств A и B называется множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B, т.е.

$$A \cup B = \{x | x \in A \quad или \quad x \in B\}.$$

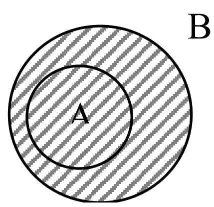
На диаграммах Эйлера-Венна объединение изобразится так:



$A \cup B$



$A \cup B$

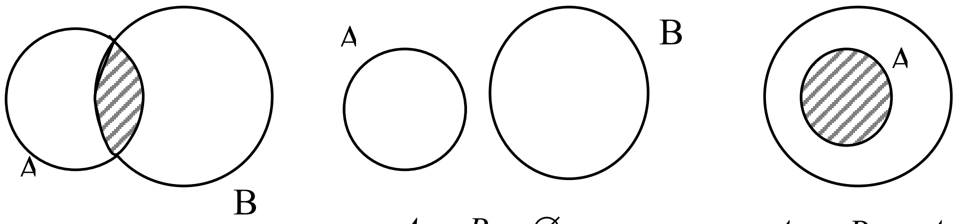


$A \cup B = B$

Пересечением множеств A и B называется множество $A \cap B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат одновременно и множеству A, и множеству B, т.е.

$A \cap B = \{x | x \in A \quad и \quad x \in B\}$.

На диаграммах Эйлера-Венна пересечение множеств изобразится так:



$A \cap B = \varnothing$ $\qquad$ $A \cap B = A$

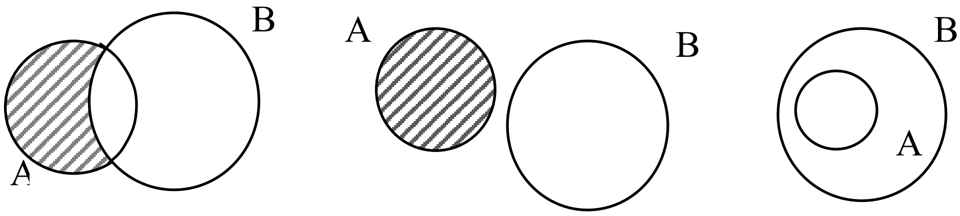
Например, если $A = \{0,1,2,5\}, \quad B = \{-3;2;4,5\}$, то

$$A \cup B = \{-3;0,1,2,4,5\} \text{ и } A \cap B = \{2,5\}.$$

Разностью множеств A и B называется множество $A \setminus B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A и не принадлежат множеству B, т.е.

$A \setminus B = \{x | x \in A \quad и \quad x \in B\}$.

На диаграммах Эйлера-Венна разность множеств изобразится так:



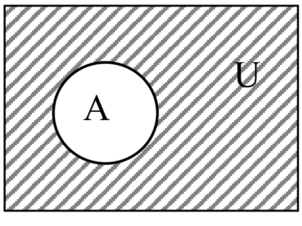
A\B=A $\qquad$ A\B=∅

Например, $A \setminus B = \{0,1,2,5\} \setminus \{-3,2,4,5\} = \{0,1\}$,
$B \setminus A = \{-3,2,4,5\} \setminus \{0,1,2,5\} = \{-3,4\}$.

Дополнением множества A до универсального U называется разность $U \setminus A$ и обозначается $\overline{A}$, т.е.

$\overline{A} = U \setminus A = \{x | x \in U \ и \ x \notin A\}$.

На диаграммах Эйлера-Венна дополнение $\overline{A}$ изобразится так:



Декартовым (или ***прямым) произведением*** множеств A и B называется множество $A \times B$, состоящее из всех упорядоченных пар, у которых первая координата принадлежит множеству A, вторая – множеству B, т.е.

$$A \times B = \{(x; y) | x \in A \text{ и } y \in B\}.$$

Например, если $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2;4\}$, то

$$A \times B = \{(1,2),(2,2),(3,2),(1,4),(2,4),(3,4)\},$$

$$B \times A = \{(2,1),(2,2),(2,3),(4,1),(4,2),(4,3)\}.$$

Очевидно, что $A \times B \neq B \times A$, т.е. для операции декартова произведения множеств закон коммутативности не выполняется.

Наглядное изображение декартова произведения $A \times B$ можно получить при помощи ***графика.*** На рис.2 точками отмечены элементы множества $A \times B = \{1,2,3\} \times \{2,4\}$.

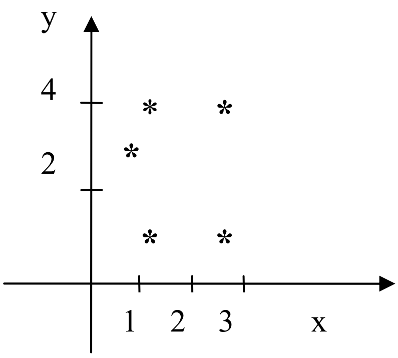


Рис.2

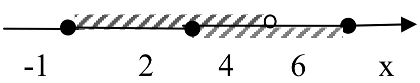
Пример 1. Изобразить множества

$A = \{x | x \in R, -1 \le x < 4\}$ и $B = \{x | x \in R, 2 \le x \le 6\}$ на числовой прямой. Выполнить операции: $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $\overline{A}$, $A \times B$. Записать результат каждой операции с указанием характеристического свойства.

Решение.

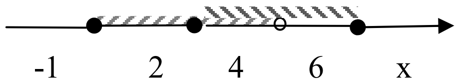
1) $A = \{x | x \in R, -1 \le x < 4\} = (-1;4]$

$B = \{x | x \in R, \ 2 \le x \le 6\} = [2;6]$.



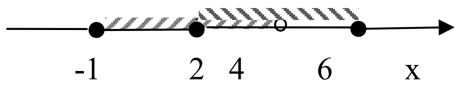
Если изобразить множества A и B на числовой прямой, то объединение $A \cup B$ есть часть оси, где имеется хотя бы одна штриховка, т.е. $A \cup B = [-1;6] = \{x | x \in R, \quad -1 \le x \le 6\}$.

2) Пересечение множеств $A \cap B$ есть часть оси, где есть двойная штриховка, т.е.



$A \cap B = [2;4) = \{x | x \in R, \quad 2 \le x < 4\}$.

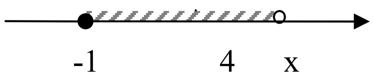
3) Разность $A \setminus B$ есть часть множества A, отмеченная лишь одной штриховкой, т.е.



$A \setminus B = [-1;2) = \{x | x \in R, \quad -1 \le x < 2\}$.

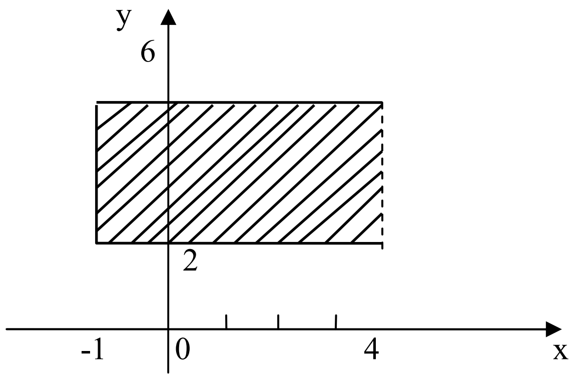
Точка $x = 2 \in B$ и поэтому $2 \notin A \setminus B$.

4) Найдем $\overline{A}$, считая универсальным множество всех действительных чисел, т.е. $\overline{A} = R \setminus A$.



Дополнение множества A есть часть оси, где нет штриховки, т.е. $\overline{A} = (-\infty;-1) \cup [4;+\infty) = \{x | x \in R, \quad x < -1 \quad \textit{или} \quad x \ge 4\}$

.Точка $x = -1 \notin \overline{A}$, так как $x = -1 \in A$; точка $x = 4 \in A$, так как $x = 4 \notin \overline{A}$.



5) Множество $A = [-1;4)$ изобразим на оси Ox, множество $B = [2;6]$ на оси Oy. Тогда декартово произведение изобразится заштрихованным прямоугольником, но без его левой стороны, т.е.

$A \times B = \{(x, y) | x, y \in R, \quad -1 \le x < 4 \quad и \quad 2 \le y \le 6\}$.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1 Законы алгебры множеств

Алгеброй множеств называется часть теории множеств, в которой изучаются свойства операций над множествами.

Операции объединения и пересечения множеств обладают многими свойствами хорошо известных алгебраических операций сложения и умножения действительных чисел. Особенностью алгебры множеств является закон идемпотентности, благодаря которому в алгебре множеств нет числовых коэффициентов и степеней.

Законы алгебры множеств

1. Закон коммутативности:

$A \cup B = B \cup A$; $\qquad A \cap B = B \cap A$.

2. Закон ассоциативности:

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$; $\qquad (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

3. Закон дистрибутивности:

$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$; $\qquad (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

4. Свойства пустого множества:

$A \cup \varnothing = A$; $\quad A \cap \varnothing = \varnothing$; $\qquad A \cap \overline{A} = \varnothing$.

5. Свойства универсального множества:

$A \cup U = U$; $\quad A \cap U = A$; $\qquad A \cup \overline{A} = U$.

6. Закон двойного дополнения:

$\overline{\overline{A}} = A$.

7. Законы идемпотентности:

$A \cup A = A$; $\qquad A \cap A = A$.

8. Законы де Моргана:

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$; $\qquad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

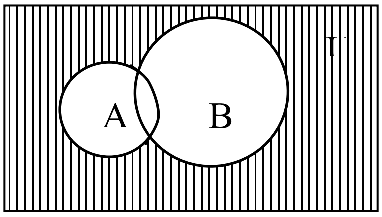
9. Законы поглощения:

$A \cup (A \cap B) = A$; $\qquad A \cap (A \cup B) = A$.

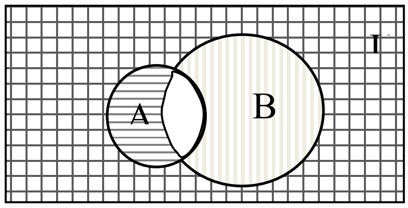
Каждый из указанных законов является утверждением о равенстве множеств. Установить его справедливость можно с помощью диаграмм Эйлера-Венна.

Например, проверим верность закона $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.

Изобразим на диаграммах Эйлера-Венна левую и правую части равенства и сравним их:



||| $-\ \overline{A \cup B}$



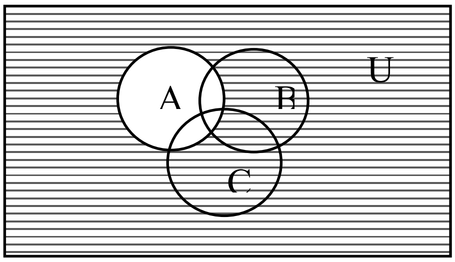
$-\ \overline{A} \cap \overline{B}$

Видно, что на обеих диаграммах получилось одинаковое множество точек (слева – ||; справа –#), поэтому можно сделать вывод о верности этого закона.

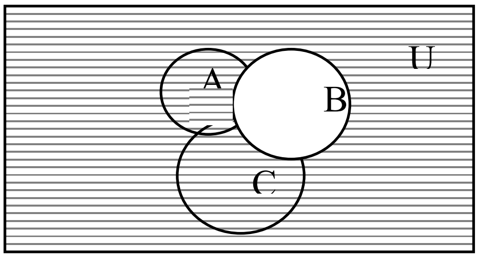
Замечание. Важно понимать, что указанный способ всего лишь демонстрирует справедливость равенства. Строгое математическое доказательство опирается на определение равенства множеств и операций над ними.

Пример 2. Изобразить множество $M = \left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap C$ на диаграммах Эйлера-Венна.

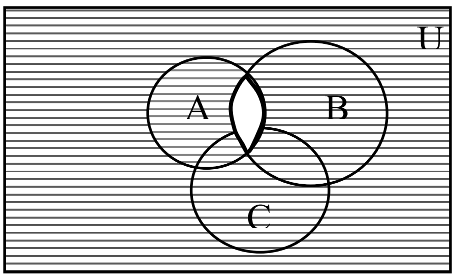
Решение. Множество M является результатом операций над множествами A, B и C. Изобразим результат выполнения этих операций последовательно.



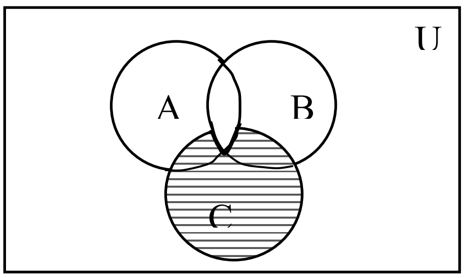
2. $\overline{A}$



2. $\overline{B}$



3. $\overline{A} \cup \overline{B}$



4. $\left(\overline{A} \cup \overline{B}\right) \cap C = M$

Пример 3. Упростить выражение, пользуясь законами алгебры множеств:

$A \cap \left(\overline{A} \cup B\right) \cup \left(B \cup C\right) \cup B$.

Решение. Поскольку операция пересечения множеств имеет более высокий приоритет, чем объединение множеств, то, если нет скобок, изменяющих приоритет, сначала выполняется пересечение, а затем - объединение. Пользуясь этим правилом и законом ассоциативности, определим порядок действий:

$$\left(A\overset{1}{\cap}\left(\overline{A}\cup B\right)\right)\overset{3}{\cup}\left(\left(B\cup C\right)\overset{2}{\cup}B\right).$$

Выполним преобразования, указывая номер закона над знаком равенства:

1) $A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\overset{3}{=}\left(A\cap\overline{A}\right)\cup\left(A\cap B\right)\overset{4}{=}\varnothing\cup\left(A\cap B\right)\overset{4}{=}A\cap B$;

2) $\left(B\cup C\right)\cup B\overset{1}{=}\left(C\cup B\right)\cup B\overset{2}{=}C\cup\left(B\cup B\right)\overset{7}{=}C\cup B$;

3) $\left(A\cap B\right)\cup\left(C\cup B\right)\overset{1}{=}\left(A\cap B\right)\cup\left(B\cup C\right)\overset{2}{=}\left(\left(A\cap B\right)\cup B\right)\cup C\overset{1}{=}$
$=\left(B\cup\left(B\cap A\right)\right)\cup C\overset{9}{=}B\cup C.$

Итак,
$A\cap\left(\overline{A}\cup B\right)\cup\left(B\cup C\right)\cup B=B\cup C.$

2.2 Бинарные отношения и их свойства

Бинарным отношением между множествами A и B называется любое подмножество декартова произведения $A\times B$.

Если $A=B$, то говорят, что бинарное отношение R задано на множестве A, т.е. $R\subseteq A\times A$.

Тот факт, что пара (x,y) принадлежит данному отношению R будем записывать $(x,y)\in R$ или xRy.

Бинарное отношение можно задать, указав характеристическое свойство или перечислив все его элементы. Существуют и более наглядные способы задания: график отношения, граф отношения, матрица отношения.

График отношения изображается в декартовой системе координат. Каждой упорядоченной паре отношения $(x,y)\in R$ соответствует точка плоскости с этими координатами.

Графом называется объединение конечного числа точек и линий, которыми соединены некоторые из точек. Точки называются ***вершинами графа***, а линии, их соединяющие, – ***ребрами графа***. Число ребер, выходящих из вершины, называется ***степенью*** этой вершины. Пара точек x и y соединяется дугой (линией со стрелкой) тогда и только тогда, когда пара (x,y) принадлежит отношению R.

Матрица отношения $R\subseteq A\times A$ – это квадратная таблица, каждая строка и столбец которой соответствуют некоторому элементу множества A. На пересечении строки x и столбца y ставится 1. Если пара $(x,y)\in R$, то все остальные элементы матрицы заполняются нулями.

Например, пусть на $A=\{1,2,3,4\}$ задано отношение

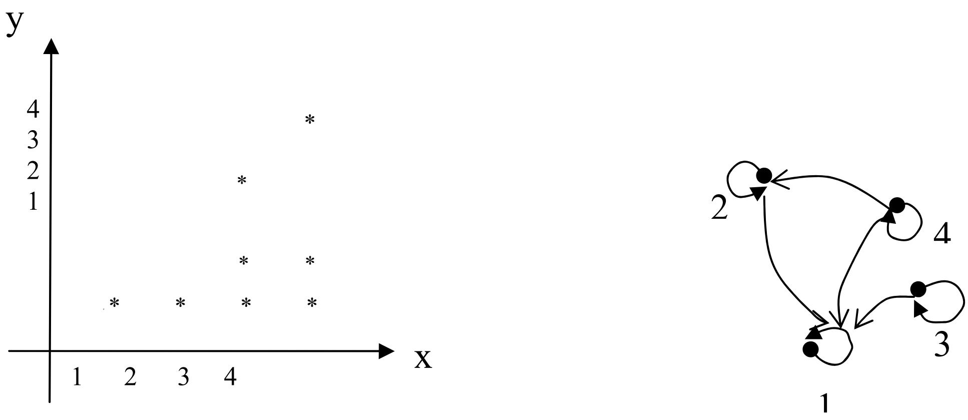
$R=(x,y)|x$ делится на y; $x,y\in A\}$.

Представим отношение R другими способами.

Перечислим элементы этого отношения

$A=\{(1,1),(2,1),(2,2),(3,1),(3,3),(4,1),(4,2),(4,4)\}$.

Изобразим график отношения R на рис. 2а и граф на рис.2б.



а) б)

Рис.2

Запишем матрицу отношения: $R=\begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \end{array}$

2.3 Основные свойства бинарных отношений

Бинарное отношение, заданное на некотором множестве, может обладать рядом свойств, определяющих вид этого отношения.

Отношение R на множестве A называется ***рефлексивным,*** если каждый элемент $x\in A$ находится в этом отношении сам с собой, то есть $(x,x)\in R$.

Например, отношение «≤» на множестве действительных чисел рефлексивно, так как $x\le x$ для любого числа x. Также рефлексивным является отношение параллельности прямых, а отношение перпендикулярности этим свойством не обладает, так как никакая прямая не перпендикулярна сама себе.

Отношение R на множестве A называется ***симметричным***, если из условия $(x,y)\in R$ следует, что $(y,x)\in R$.

Например, отношение параллельности прямых является симметричным, так как для любых прямых a и b имеет место следующее:

если $a \| b$, то $b \| a$. Симметричным также является и отношение перпендикулярности прямых.

Отношение R на множестве A называется ***транзитивным***, если из того, что $(x, y) \in R$ и $(y, z) \in R$, следует, что $(x, z) \in R$.

Например, отношение «≤» транзитивно, так как известно, что, если $x \le y$ и $y \le z$, то $x \le z$. Также транзитивным является отношение параллельности прямых.

Отношение R на множестве A называется ***отношением эквивалентности***, если оно обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Например, отношение параллельности прямых и отношение равенства на множестве действительных чисел являются отношениями эквивалентности.

Важной особенностью отношений эквивалентности является то, что они разбивают всё множество A на непересекающиеся подмножества – классы эквивалентности.

Пусть R – отношение эквивалентности на A. ***Классом эквивалентности***, порожденным элементом $x \in A$, называется подмножество $[x]$ множества A, для элементов которого выполняется условие $(x; y) \in R$, т.е. $[x] = \{y | y \in A, \quad (x, y) \in R\}$.

Классы эквивалентности образуют систему непустых непересекающихся подмножеств множества A, в объединении дающую всё множество A, то есть образуют разбиение множества A на классы.

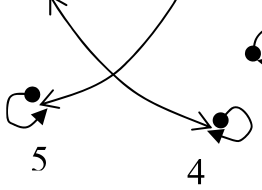
Пример 4. На множестве $A = \{1,2,3,4,5\}$ задано бинарное отношение $R = \{(x, y) | (x - y) \quad \textit{делится на } 3; x, y \in A\}$. Построить граф отношения и выяснить, какими свойствами обладает это отношение.

Решение.

Зададим отношение R перечислением всех элементов:

$R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,4),(4,1),(2,5),(5,2)\}$.

Построим граф отношения R.



Выясним, какими свойствами обладает отношение.

Отношение R рефлексивно, т.к. граф отношения имеет в каждой своей вершине петлю, т.е. $(x, x) \in R$ для любого $x \in A$.

Отношение R симметрично, т.к. граф вместе с каждой стрелкой содержит противоположную ей стрелку. Для упрощения проводят одну линию с двумя стрелками.

Отношение R транзитивно, т.к. граф отношения вместе с каждой парой стрелок xy и yz содержит стрелку xz.

Итак, отношение R обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности, следовательно, является отношением эквивалентности. На графе отношения R хорошо видны классы эквивалентности – это подмножества множества A:

$[1] = \{1;4\}, \quad [2] = \{2,5\}, \quad [3] = \{3\}.$

2.4 Высказывания и операции над ними

Понятие «высказывание» является первоначальным. В качестве синонимов слова «высказывание» употребляют слова «утверждение», «суждение».

Под ***высказыванием*** понимают повествовательное предложение, о котором можно однозначно сказать истинно оно или ложно.

Высказывания обозначают большими латинскими буквами $A, B, C \ldots$. Если высказывание A ***истинно*** (верно), то пишут $A = 1$; запись $A = 0$ означает, что A ***ложно*** (неверно).

Например, если A – это высказывание «Диагонали ромба взаимно перпендикулярны», а B – «белые медведи живут в Африке», то $A = 1$, а $B = 0$.

Среди высказываний можно выделить ***простые*** (или элементарные) и ***сложные*** (или составные). ***Сложные высказывания*** строятся из простых при помощи так называемых ***логических связок***. Логические связки соответствуют операциям над высказываниями и в языке выражаются с помощью частиц и союзов «не», «и», «или», «если …, то», «тогда и только тогда».

В соответствии с перечисленными связками вводится пять логических операций.

Отрицанием высказывания A называется новое высказывание, которое обозначается $\overline{A}$, читается «неверно, что A» или «***не*** A», и истинно, если A ложно, и ложно, если A истинно.

Конъюнкцией высказываний A и B называется новое высказывание, которое обозначается $A \wedge B$, читается «A ***и*** B» и истинно только в случае, когда истинны оба высказывания A и B, в остальных случаях ложно.

Дизъюнкцией высказываний A и B называется новое высказывание, которое обозначается $A \vee B$, читается «A ***или*** B» и ложно только в случае, если ложны оба высказывания A и B, в остальных случаях истинно.

Импликацией высказываний называется новое высказывание, которое обозначается $A \to B$, читается «***если*** A, ***то*** B» или «из A следует B», и ложно только в случае, если высказывание A истинно, а B ложно, в остальных случаях истинно.

В импликации $A \to B$ высказывание A называется ***посылкой*** или ***условием***, а B – ***заключением*** или ***следствием.***

В виде импликации формулируется большинство математических теорем.

Например: «**Если** три стороны одного треугольника соответственно равны трём сторонам другого треугольника, ***то*** такие треугольники равны».

Эквиваленцией высказываний AиB называется новое высказывание, которое обозначается $A \leftrightarrow B$, читается «A эквивалентно B» или «A эквивалентно B» или «A ***тогда и только тогда***, когда B», истинно в случае, если высказывания A и B принимают одинаковые значения истинности, и ложно, если значения истинности высказываний A и B различны.

Удобным описанием логических операций и составляемых с помощью них высказываний служат так называемые ***таблицы истинности*** – таблицы, в которых указаны истинные значения составного высказывания при каждом наборе значений составляющих его высказываний.

Таблицы истинности логических операций

A	B	$\overline{A}$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0
0	0	1	0	0	1	1

2.5 Формулы логики высказываний. Равносильность формул

Запись сложного высказывания в виде простых высказываний, соединенных логическими связками, называется ***логической формулой***.

Например, $F = (((A \wedge \overline{B}) \to C) \vee \overline{A})$.

Для упрощения записи сложных высказываний в логике принимают ряд соглашений:

1. Внешние скобки, соответствующие последней логической операции опускают.
2. Если надо выполнить подряд несколько однотипных операций, то скобки между ними опускают, производя операции слева направо, например: $A \vee B \vee C \vee D = ((A \vee B) \vee C) \vee D$.
3. Если скобки не поставлены, то операции выполняются слева направо с учётом приоритета логических операций. При этом убывание силы операций происходит в следующем порядке: $\overline{}, \wedge, \vee, \to, \leftrightarrow$.

Учитывая эти соглашения, вышеприведенную формулу можно записать короче: $F = (A \wedge \overline{B} \to C) \vee \overline{A}$.

В логике высказываний особую роль играют формулы, принимающие значение «истина» при любых логических значениях входящих в них высказываний. Такие формулы называются ***тавтологиями*** или тождественно истинными формулами.

Высказывание, являющееся тавтологией, будем обозначать **1.**

Формулы, принимающие значение «ложь» при любых логических значениях входящих в них высказываний, называются ***противоречиями*** или тождественно ложными.

Высказывание, являющееся противоречием, будем обозначать **0**.

Формулы F_1 и F_2, зависящие от одного и того же набора составляющих высказываний, называются ***равносильными***, если они принимают одинаковые значения истинности при любом наборе логических значений высказываний, входящих в них. Записывают равносильность так: $F_1 \equiv F_2$.

Для доказательства равносильности двух формул достаточно составить их таблицы истинности и убедиться, что они совпадают.

Пример 5. Доказать равносильность формул

$F_1 = \overline{A \wedge B}$ и $F_2 = \overline{A} \vee \overline{B}$.

Решение.

Поскольку F_1 и F_2 зависят от двух простых высказываний A и B, то таблица истинности будет содержать $2^2 = 4$ строки.

A	B	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\overline{A}$	$\overline{B}$	$\overline{A} \vee \overline{B}$
1	1	1	**0**	0	0	**0**
1	0	0	**1**	0	1	**1**
0	1	0	**1**	1	0	**1**
0	0	0	**1**	1	1	**1**

Сравнивая выделенные столбцы таблицы, убеждаемся, что они полностью совпадают, т.е. формулы равносильны: $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

Отношение равносильности на множестве формул логики высказываний является отношением эквивалентности, так как обладает свойствами рефлексивности $(F \equiv F$ для любой формулы $F)$, симметричности (если $F_1 \equiv F_2$, то $F_2 \equiv F_1$), транзитивности (если $F_1 \equiv F_2$ и $F_2 \equiv F_3$, то $F_1 \equiv F_3$). С помощью этого отношения все множество формул логики высказываний разбивается на классы равносильных формул.

Приведем основные равносильные формулы, которые называются ***законами логики высказываний.***

1. Законы коммутативности:

$A \vee B \equiv B \vee A$; $\qquad A \wedge B \equiv B \wedge A$.

2. Законы ассоциативности:

$(A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C)$; $\qquad (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C)$.

3. Законы дистрибутивности:

$(A \wedge B) \vee C \equiv (A \vee C) \wedge (B \vee C)$; $\qquad (A \vee B) \wedge C \equiv (A \wedge C) \vee (B \wedge C)$.

4. $A \vee 0 \equiv A$; $\quad A \wedge 0 = 0$.

5. $A \vee 1 \equiv 1$; $\quad A \wedge 1 \equiv A$.

6. Закон исключённого третьего:

$A \vee \overline{A} \equiv 1$

7. Закон противоречия:

$A \wedge \overline{A} \equiv 0$.

8. Закон двойного отрицания:

$\overline{\overline{A}} = A$.

9. Законы идемпотентности:

$A \vee A \equiv A$; $\qquad$ $A \wedge A \equiv A$.

10. Законы де Моргана:

$\overline{A \vee B} \equiv \overline{A} \wedge \overline{B}$; $\qquad$ $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

11. Законы поглощения: $\qquad$ $A \wedge (A \vee B) \equiv A$.

$A \vee (A \wedge B) \equiv A$;

12. Замена импликации:

$A \rightarrow B \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$.

13. Замена эквиваленции:

$A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$.

Применение логических законов позволяет упрощать сложные высказывания, то есть заменять их равносильными, более простыми.

Пример 6. Упростить формулу логики двумя способами: а) используя таблицы истинности; б) с помощью равносильных преобразований: $F = \overline{A \rightarrow B} \rightarrow A \vee B$.

Решение.

а) Учитывая приоритет логических операций, определим порядок действий:

$$F = {}^{1}\overline{\overline{A} \overset{2}{\rightarrow} B}^{\,3} \overset{5}{\rightarrow} A \overset{4}{\vee} B\,.$$

Составим таблицу истинности формул F, последовательно определяя истинность результатов участвующих в ней логических операций. Поскольку F зависит от двух простых высказываний A и B, то таблица истинности будет содержать $2^2 = 4$ строки.

A	B	$\overline{A}$	$\overline{A} \rightarrow B$	$\overline{\overline{A} \rightarrow B}$	$A \vee B$	$\overline{\overline{A} \rightarrow B} \rightarrow A \vee B$
1	1	0	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	0	0

Сравнивая два последних столбца таблицы, видим, что они полностью совпадают. Значит, формула F равносильна высказыванию $A \vee B$, т.е. $\overline{\overline{A} \rightarrow B} \rightarrow A \vee B \equiv A \vee B$.

б) Упростим данную формулу с помощью законов логики.

$$F = \overline{\overline{A} \to B} \to A \vee B \overset{12}{\equiv} \overline{\overline{\overline{A} \to B}} \vee A \vee B \overset{8}{\equiv} \left(\overline{A} \to B\right) \vee A \vee B \equiv$$

$$\overset{12}{\equiv} \left(\overline{\overline{A}} \vee B\right) \vee A \vee B \overset{8,2}{\equiv} \left(A \vee B\right) \vee \left(A \vee B\right) \overset{9}{\equiv} A \vee B.$$

2.6 Предикаты и кванторы

Предложение с переменной, которое при каждом значении переменной из некоторого множества M становится высказыванием (истинным или ложным), называется одноместным ***предикатом*** или одноместной высказывательной формой.

Если предикат зависит от ***n*** переменных, его называют ***n-местным.*** Предикаты обозначают большими буквами латинского алфавита $P, Q, R, \ldots,$ в скобках указывая переменные, от которых зависит предикат.

Например, $P(x)$ – «целое число x – четное» – одноместный предикат. При $x = 5$ получаем ложное высказывание, при $x = 8$ – истинное высказывание.

$Q(x, y)$–"$x + y^2 = 10$" – двухместный предикат, который превращается в истинное высказывание, например, при $x = 6$ и $y = 2$.

Областью определения предиката называется множество значений переменных, превращающих его в высказывание, имеющее смысл.

Множество всех значений переменных, на котором предикат принимает значение истина, называется ***областью истинности*** предиката, т.е.

$M_1^P = \{x \in M | P(x) = 1\}.$

Так, например,

1) $M = Z, \quad M_1^P = \{x \in Z | x = 2k, \quad k \in Z\};$

2) $M = N \times N, \quad M_1^Q = \{(x, y) | x + y^2 = 10, \quad x, y \in N\} = \{(1,3), (6,2)\}.$

Пусть два предиката P и Q определены на одном и том же множестве M. Так как предикаты могут принимать только два значения (истина или ложь), то к ним можно применять логические операции, образуя новые предикаты: $\overline{P}, P \wedge Q, P \vee Q, P \to Q, P \leftrightarrow Q$.

Таким же образом, как для высказываний, определяется равносильность предикатов.

Предикаты $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $Q(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называются ***равносильными***, если при любом наборе значений переменных полученные высказывания либо оба истинны, либо оба ложны.

Все законы логики высказываний, описывающие основные равносильные формулы, имеют место и для предикатов, например,

$\overline{P(x) \wedge Q(x)} \equiv \overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}$.

Кроме операций логики высказываний в логике предикатов рассматриваются ***кванторные*** операции. Для их обозначения используются символы: $\forall$ – квантор всеобщности, $\exists$ – квантор существования.

Рассмотрим эти операции на примере одноместных предикатов.

Пусть $P(x)$ – одноместный предикат, определенный на множестве M. Тогда под выражением $\forall x P(x)$ будем понимать высказывание, которое принимает значение истина тогда и только тогда, когда $P(x)$ истинно для ***каждого*** элемента $\boldsymbol{x} \in M$. Читаем так: «Для всех x выполнено $P(x)$» или «***Для любого x верно*** $P(x)$». Переменную $\boldsymbol{x}$ в предикате $P(x)$ называют ***свободной***, а в высказывании $\forall x P(x)$ – ***связанной*** квантором всеобщности.

Под выражением $\exists x P(x)$ понимают высказывание, которое является истинным, если найдется ***хотя бы один*** элемент $\boldsymbol{x} \in M$, для которого $P(x)$ истинно, и ложным, если ни одного такого элемента во множестве M нет. Читаем так: «Для некоторого x выполнено $P(x)$» или «***Существует x такое, что*** $P(x)$». Высказывание $\exists x P(x)$ не зависит от *x,* в нем переменная*x*связана квантором существования.

Если мы рассматриваем предикат от нескольких переменных, то кванторы могут быть приписаны либо ко всем переменным, либо только к части переменных. Если все переменные связаны, то предикат становится высказыванием. Если связанной является только часть переменных, то получаем в результате предикат от меньшего числа переменных.

Например, $\exists y Q(x;y)$ – одноместный предикат, т.к. связана переменная *y*, переменная *x* осталась свободной; $\forall x \exists y Q(x,y)$ – высказывание, т.к. связаны обе переменные.

Важно заметить, что при рассмотрении высказываний с кванторами, полученных из предикатов от нескольких переменных, смысл высказывания существенно зависит от того, в каком порядке записаны кванторы и переменные, к которым они приписаны. Только одинаковые кванторы, идущие подряд, можно, не теряя общего смысла предложения, менять местами.

Чтобы построить отрицание высказывания с квантором, надо квантор всеобщности заменить на квантор существования (или квантор существования заменить на квантор всеобщности), а предикат заменить его отрицанием, т.е.

$$\overline{\forall x P(x)} \equiv \exists x \overline{P(x)}; \quad \overline{\exists x P(x)} \equiv \forall x \overline{P(x)}.$$

Пример 7. На множестве $M = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ заданы предикаты: $A(x)$ – «x делится на 2», $B(x)$ – «$x \geq 2$», $C(x)$ – «x – простое число». Найти и изобразить при помощи диаграмм Эйлера-Венна области истинности предикатов: а) $P(x) = A(x) \vee B(x) \wedge C(x)$; б) $Q(x) = B(x) \to A(x) \wedge C(x)$.

Решение.

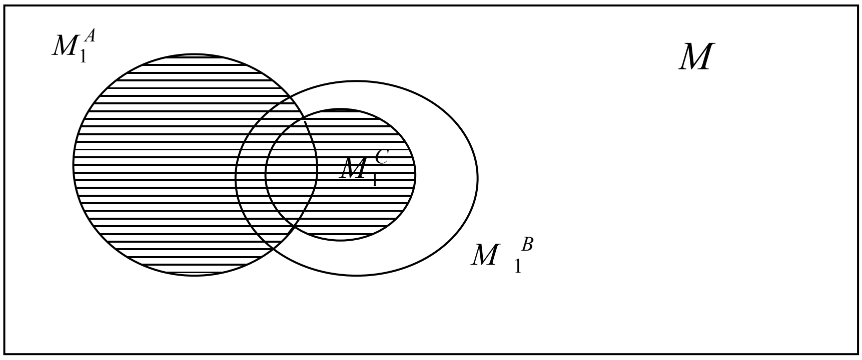
Найдем множества истинности данных предикатов:

$M_1^A = \{0,2,4,6,8,10\}$; $M_1^B = \{2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$; $M_1^C = \{2,3,5,7\}$.

Видим, что $M_1^C \subset M_1^B$. Учтем этот факт при изображении данных множеств с помощью кругов Эйлера-Венна.

а) Найдем область истинности предиката $P(x) = A(x) \vee B(x) \wedge C(x)$.

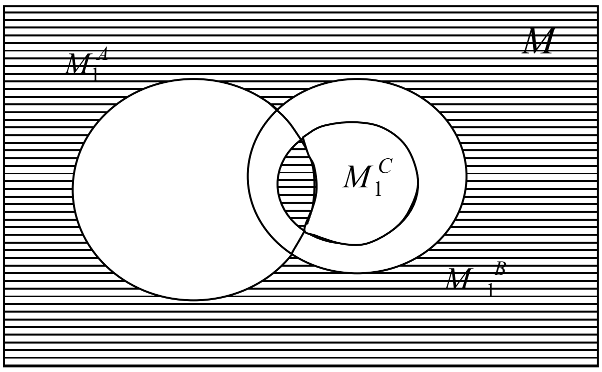
$$M_1^P = M_1^A \cup M_1^{B \wedge C} = M_1^A \cup \left(M_1^B \cap M_1^C\right) = M_1^A \cup M_1^C = \{0,2,3,4,5,6,7,8,10\}.$$



б) Для построения области истинности предиката $Q(x)$ упростим его: $Q(x) = B(x) \to A(x) \wedge C(x) \equiv \overline{B(x)} \vee A(x) \wedge C(x)$.

Тогда

$$M_1^Q = M_1^{\overline{B}} \cup M_1^{A \wedge C} = M_1^{\overline{B}} \cup \left(M_1^A \cap M_1^C\right) = \{0,1\} \cup \{2\} = \{0,1,2\}.$$



Области истинности предикатов $P(x)$ и $Q(x)$ показаны на рисунках штриховкой.

2.7 Сравнения по модулю

Будем рассматривать целые числа в связи с остатками от деления их на данное целое числа **m**, которое назовем модулем. Каждому целому числу отвечает определенный остаток от деления его на **m**. Если двум целым **a** и **b** отвечает один и тот же остаток **r**, то они называются сравнимыми по модулю **m**.

Сравнимость для **a** и **b** записывается так: $a \equiv b(mod\ m)$

Сравнимость чисел **a** и **b** по модулю **m** равносильна:

1) возможности представить **a** в форме $a = b + mt$, где t — целое;

2) делимости $a - b$ на m.

Действительно, из $a \equiv b(mod\ m)$ следует $a = mq + r,\ b = mq_1 + r$, откуда $a - b = m(q - q_1)$, и $a = b + mt$, где $t = q - q_1$.

Обратно, из $a = b + mt$, представляя **b** в форме $b = mq_1 + r$, выводим $a = mq + r$, где $q = q_1 + t$, значит $a \equiv b(mod\ m)$.

Свойства сравнений:

1. Два числа, сравнимые с третьим, сравнимы между собой: $a \equiv c(mod\ m),\ b \equiv c(mod\ m) \Rightarrow a \equiv b(mod\ m)$.

2. Сравнения можно поэлементно складывать: $a_1 + a_2 + a_3 \equiv b_1 + b_2 + b_3(mod\ m)$.

3. Сравнения можно поэлементно перемножать: $a_1a_2a_3 \equiv b_1b_2b_3(mod\ m)$.

4. Обе части сравнения можно разделить на их общий делитель, если последний взаимно прост с модулем.

5. Обе части сравнения можно умножить на одно и тоже число.

6. Обе части сравнения и модуль можно разделить на их общий делитель.

7. Если сравнение $a \equiv b$ имеет место по нескольким модулям, то оно имеет место и по модулю равному НОК этих модулей.

8. Если сравнение имеет место по модулю **m**, то оно имеет место и по модулю **d**, равному любому делителю числа **m**.

9. Если одна часть сравнения и модуль делятся на некоторое число, то и другая сторона сравнения должна делиться на это число.

10. Если $a \equiv b(mod\ m)$, то $(a, m) = (b, m)$.

Полная и приведенная система вычетов

Числа равноостаточные (сравнимые по модулю **m**) образуют класс чисел по модулю **m**. Из такого определения следует, что всем числам класса отвечает один остаток **r**, и мы получим все числа класса, если в форме $mt + r$ заставим t пробегать все целые числа. Таким образом, для каждого значения остатка имеется свой класс чисел.

Любое число класса называется **вычетом** по модулю **m**. Вычет получаемый при $t = 0$, равный самому остатку **r**, называется **наименьшим неотрицательным вычетом**.

Любые **m** чисел, попарно несравнимые по модулю **m**, образуют **полную систему вычетов** по этому модулю. Согласно 10 свойству сравнений, числа одного класса по модулю **m** имеют одинаковый НОД. Особенно важны классы, содержащие числа, взаимно простые с модулем. Взяв вычет от каждого такого класса, получим **приведенную систему вычетов** по модулю **m**.

Решение линейных систем по модулю

Пусть $(a, m) = d$. Сравнение $ax \equiv b(mod\ m)$ невозможно, если b не делится на **d**. При b, кратном **d**, сравнение имеет **d** решений.

Поиск решений:

$ax \equiv b(mod\ m)$, $(a, b) = d$

Составим новое сравнение $\frac{a}{d}x \equiv \frac{b}{d}(mod\ \frac{m}{d})$, обозначим его $a_d x \equiv b_d(mod\ m_d)$. Пусть его решением будет x_0, тогда остальные решения найдутся по следующей формуле: $x_n = x_{n-1} - m_d$ (следует понимать, что x_i вычет по модулю, поэтому в этой формуле можно сменить знак, для удобства), всего решений будет d. Если нахождение x_0 не является очевидным, то следует воспользоваться теорией цепных дробей, и тогда $x_0 = (-1)^{n-1} P_{n-1} b_d$, где P_{n-1} - числитель подходящей дроби.

Примеры решения

Пример 1.

$12x \equiv 6(mod\ 18)$

Найдем НОД $(12, 18) = 6$

Перейдем к новому сравнению $2x \equiv 1(3)$

Легко находится $x_0 = 2$.

Тогда ответом будет $x_0 = 2, x_1 = x_0 - \frac{m}{(a,m)} = -1, x_2 = -4$

Пример 2.

$111x \equiv 75(mod\ 321)$

Найдем НОД $(111, 321) = 3$, 75 кратно 3, значит имеем 3 решения.

Перейдем к новому сравнению $37x \equiv 25(107)$.

Воспользуемся цепными дробями, в нашем случае $n = 4, p_{n-1} = 26$, значит $x_0 \equiv -26 \cdot 25(107) \equiv 99(107)$.

Тогда ответом будет $x_0 = 99, x_1 = 206, x_2 = 313$.

3. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Пример 1. Составим таблицу истинности для формулы $\overline{B} \to \overline{A}$:

B	A	$\overline{B}$	$\overline{A}$	$\overline{B} \to \overline{A}$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

Пример 2. Проверим эквивалентность формул $A \vee B$ и $\overline{A \wedge \overline{B}}$, составив для них таблицы истинности.

A	B	$A \vee B$	$\overline{B}$	$A \wedge \overline{B}$	$\overline{A \wedge \overline{B}}$
0	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	0	1

Формулы не эквивалентны, так как 3-й и 6-й столбцы таблицы не совпадают.

Пример 3. Для упрощения формулы используем правило исключения импликации: $A_1 \to A_2 = \overline{A}_1 \vee A_2$.

$$\neg(A_1 \to A_2) \vee (A_2 \to \overline{A}_1) = (\overline{\overline{A}_1 \vee A_2}) \vee \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1 = (\overline{\overline{A}}_1 \wedge \overline{A}_2) \vee \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1 =$$
$$= (A_1 \wedge \overline{A}_2) \vee \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1 = \overline{A}_2 \wedge (A_1 \vee 1) \vee \overline{A}_1 = \overline{A}_2 \vee \overline{A}_1.$$

Пример 4. Используя законы логики, приведем формулу $\overline{(A \wedge B) \vee C}$ к виду, содержащему только дизъюнкции элементарных конъюнкций. Полученная формула и будет искомой ДНФ:

$$\overline{(A \wedge B) \vee C} = \overline{(A \wedge B)} \wedge \overline{C} = (\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge \overline{C} = (\overline{A} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{B} \wedge \overline{C})$$

Для построения СДНФ составим таблицу истинности для данной формулы:

A	B	C	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \vee C$	$\overline{(A \wedge B) \vee C}$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

Помечаем те строки таблицы, в которых формула (последний столбец) принимает значение «1». Для каждой такой строки выпишем формулу, истинную на наборе переменных A,B,C данной строки: строка 1 – $\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$; строка 3 – $\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}$; строка 5 – $A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}$. Дизъюнкция этих трех формул будет принимать значение «1» только на наборах переменных в строках 1, 3, 5, а следовательно и будет искомой совершенной дизьюнктивной нормальной формой (СДНФ): $(\overline{A} \wedge \overline{B} \wedge \overline{C}) \vee (\overline{A} \wedge B \wedge \overline{C}) \vee (A \wedge \overline{B} \wedge \overline{C})$

Пример 5. Для того, чтобы записать формулу в приведенном виде, следует, пользуясь формулой $A \to B = \overline{A} \vee B$,исключить операцию импликации, а затем «опустить» операцию отрицания на простые переменные: $\overline{A \to B \vee C} = \overline{\overline{A} \vee (B \vee C)} = \overline{\overline{A}} \wedge \overline{B \vee C} = A\overline{B}\overline{C}$.

Пример 6. Построить полином Жегалкина для функции.

Способ 1. (Метод неопределенных коэффициентов).

Составляем таблицу истинности для функции $x_1 \leftrightarrow x_2$:

x_1	x_2	$x_1 \leftrightarrow x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Записываем полином Жегалкина с неизвестными коэффициентами a_0, a_1, a_2, a_{12} для функции от двух переменных: $x_1 \leftrightarrow x_2 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2$.

Подставляя в это разложение значения x_1 и x_2из таблицы, определяем неизвестные коэффициенты.

Подставляя x_1=0, x_2=0,получаем:1= a_0;

x_1=0, x_2=1 —0=1$\oplus$ $a_2 \Rightarrow a_2$=1;

x_1=1, x_2=0 —0=1$\oplus$ $a_1 \Rightarrow a_1$=1;

x_1=1, x_2=1—1=1$\oplus$ $a_{12} \Rightarrow a_{12}$=0.

Полином Жегалкина имеет вид: $x_1 \leftrightarrow x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$.

Способ 2. (Эквивалентные преобразования).

Сначала запишем СДНФ $\bigvee\limits_{(\sigma_1,\sigma_2)|\ f(\sigma_1,\sigma_2)=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2}$ эквивалентности:

$x_1 \leftrightarrow x_2 = \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_2 = \{$т.к. $x \vee y = x \oplus y \oplus xy\}$ $=$ $= \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus x_1x_2 \oplus \bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2 =$ $\{$поскольку $\bar{x}_1\bar{x}_2x_1x_2 = 0\}$ $= \bar{x}_1\bar{x}_2 \oplus x_1x_2 =$ $\{$далее, $\bar{x} = 1 \oplus x$, поэтому $\}$ $= (1 \oplus x_1)(1 \oplus x_2) \oplus x_1x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$.

Пример 7. Проверить самодвойственность функции. Сначала преобразуем исходную формулу:

$(x_1 \to x_2) \to x_1x_3 = \overline{(\bar{x}_1 \vee x_2)} \vee x_1x_3 = x_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 = x_1(\bar{x}_2 \vee x_3)$;

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1(\bar{x}_2 \vee x_3)$. $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = \overline{\bar{x}_1(x_2 \vee \bar{x}_3)} = x_1 \vee \overline{(x_2 \vee \bar{x}_3)} = x_1 \vee \bar{x}_2x_3$. Пусть

$x_1 = 0\ x_2 = 0\ x_3 = 1$, тогда $f(x_1, x_2, x_3) = 0, \bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = 1$, поэтому $f(x_1, x_2, x_3) \neq \overline{f(\overline{x_1}, \overline{x_2}, \overline{x_3})}$, следовательно функция f несамодвойственна.

Пример 8. Функция $f = (1011)$ немонотонная, т.к. $(00) < (01)$, но $f(0,0) > f(0,1)$.

Пример 9. Для доказательства полноты системы $\{x_1 \leftrightarrow x_2, \overline{x_1}, \overline{x_1} \to \overline{x_2}\}$ необходимо проверить, что система содержит функцию не сохраняющую 0, функцию не сохраняющую 1, немонотонную функцию, несамодвойственную функцию и нелинейную функцию. Докажем полноту системы $\sum = \{x_1 \sim x_2, \bar{x}_1, \bar{x}_1 \to \bar{x}_2\}$. Обозначим $f_1(x_1, x_2) = x_1 \sim x_2$ и выпишем ее таблицу истинности

x_1	x_2	$x_1 \sim x_2$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Функция f_1 не сохраняет 0. Выясним, является ли f_1 самодвойственной.

$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \sim \bar{x}_2$	$\bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$
1	1	1	0
1	0	0	1
0	1	0	1
0	0	1	0

Т.к. $f_1(x_1, x_2) \neq \bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$, то f_1 несамодвойственна.

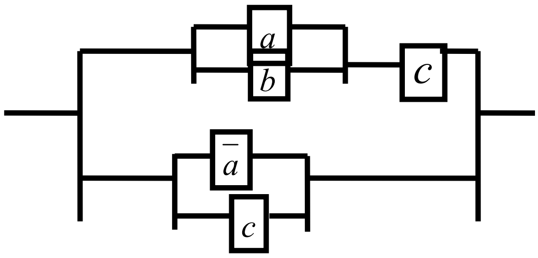
Функция $f_2(x) = \bar{x}$ немонотонная, и не сохраняет 1. Найдем полином Жегалкина для $f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \to \bar{x}_2 = a_0 \oplus a_1 x_1 \oplus a_2 x_2 \oplus a_{12} x_1 x_2$

x_1	x_2	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_1 \to \bar{x}_2$
0	0	1	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1
1	1	0	0	1

$a_0 = 1; 0 = 1 \oplus a_2 \Rightarrow a_2 = 1; 1 = 1 \oplus a_1 \Rightarrow a_1 = 0; 1 = 1 \oplus 1 \oplus a_{12} \Rightarrow a_{12} = 1;$

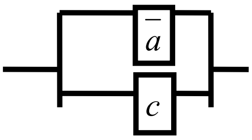
Функция $f_3(x_1, x_2) = \bar{x}_1 \to \bar{x}_2 = 1 \oplus x_2 \oplus x_1 x_2$ нелинейная. Согласно теореме о полноте, $\sum$ – полная система.

Пример 10. Составим функцию проводимости для схемы:



$f(a,b,c) = (\bar{a} \vee c) \vee [(a \vee b) \wedge c] = (\bar{a} \vee c) \vee [ac \vee bc] = \bar{a} \vee c \vee ac \vee bc = \bar{a} \vee c.$

Полученной формуле соответствует схема:



4. ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРАКТИКУМА

Задание 1. На диаграммах Эйлера-Венна изобразить результат операций, предварительно указав порядок действий в формуле.

1. $\overline{A \cup B \setminus \overline{C}}$
2. $\overline{A \cap C} \setminus B \cup \overline{A}$.
3. $A \cup B \setminus \overline{B \cap C}$
4. $\overline{A \cap B \setminus C} \cup \overline{A}$
5. $A \cup B \setminus \overline{A \cap C}$
6. $\overline{A \cup C} \setminus (B \cap C)$
7. $A \cap C \setminus \overline{B \cup A}$
8. $\overline{\overline{A \setminus B} \cup C} \cap A$
9. $A \cap B \setminus \overline{C \cup B}$
10. $A \cap \overline{B \cup C} \cup \overline{A}$

Задание 2. Упростить выражения, используя законы алгебры множеств.

1. $\overline{(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$.
2. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cup B)$.
3. $\overline{\overline{A} \cap \overline{B} \cap C} \cap \overline{\overline{A} \cap B} \cap \overline{A} \cap C$.
4. $(A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$.
5. $A \cap (\overline{A} \cup B) \cup B \cap (B \cap C) \cup B$.
6. $(\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cup \overline{B})$.
7. $A \cap (A \cap B) \cup \overline{B}$.
8. $(A \cap B \cap C) \cup (\overline{A} \cap B \cap C) \cup (\overline{B} \cup \overline{C})$.
9. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup A$.
10. $(((A \cap B) \cup B) \cap \overline{A}) \cup B$.

Задание 3. Упростить формулы логики двумя способами: а) используя таблицы истинности; б) с помощью равносильных преобразований.

1. а) $A \wedge B \to \overline{A} \to B$;б) $\overline{A} \vee \overline{B} \vee \overline{\overline{A \vee B} \leftrightarrow A}$.
2. а) $A \vee B \leftrightarrow \overline{B}$;б) $A \to \overline{\overline{A} \wedge B} \leftrightarrow \overline{A} \vee \overline{B}$.
3. а) $B \wedge \overline{A} \to \overline{A \vee B}$;б) $A \to B \vee \overline{\overline{A} \leftrightarrow B}$.
4. а) $A \wedge B \leftrightarrow B \to \overline{A}$;б) $\overline{\overline{A} \to B} \to \overline{A} \vee \overline{B}$.
5. а) $\overline{A \to B} \vee A \wedge \overline{B}$;б) $\overline{A} \vee B \to \overline{\overline{A} \vee B} \leftrightarrow \overline{A}$.
6. а) $A \vee B \to \overline{A \wedge B}$;б) $\overline{A} \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B \to A$.
7. а) $A \wedge \overline{A \leftrightarrow B} \vee A$;б) $\overline{B \vee A} \wedge \overline{A} \wedge \overline{A \to B}$.
8. а) $\overline{A \wedge B} \leftrightarrow B \vee \overline{A}$;б) $\overline{A} \vee \overline{\overline{B} \to A} \wedge A$.
9. а) $A \wedge B \to \overline{A \leftrightarrow B}$;б) $\overline{A} \leftrightarrow \overline{\overline{B} \to A} \vee B$.
10. а) $A \to B \leftrightarrow \overline{A} \vee B$;б) $\overline{A \vee B} \wedge \overline{B \vee \overline{A}} \leftrightarrow \overline{A}$.

Задание 4. Используя равносильные преобразования, докажите, что следующие формулы являются тавтологиями алгебры высказываний.

1. $(((P \wedge Q) \to R) \wedge (\overline{R} \to Q)) \to (P \to R)$

2. $((P \to R) \wedge (Q \to S) \wedge (\overline{R} \vee \overline{S})) \to (\overline{P} \vee \overline{Q})$

3. $((P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \vee R)) \to (Q \vee S)$

4. $((P \to Q) \wedge (R \to S) \wedge (P \vee R) \wedge (Q \wedge S)) \to ((Q \to P) \wedge (S \to R))$

5. $((\overline{A} \to B) \wedge ((B \wedge C) \to A)) \to (C \to A)$

6. $((\overline{A} \vee \overline{B}) \wedge (C \to B) \wedge (D \to A)) \to (\overline{D} \vee \overline{C})$

7. $((A \to B) \wedge (D \to C) \wedge (A \vee D)) \to (B \vee C)$

8. $((A \to B) \wedge (A \vee C) \wedge (C \to D) \wedge (\overline{B \wedge D})) \to ((B \to A) \wedge (D \to C))$

9. $(((X \wedge Y) \to Z) \wedge (\overline{Z} \to Y)) \to (X \to Z)$

10. $((X \to Y) \wedge (Z \to M) \wedge (\overline{Y} \vee \overline{M})) \to (\overline{X} \vee \overline{Z})$.

Задание 5. Составить таблицы истинности дляформул.

1. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{A \vee B})$
2. $\overline{A} \leftrightarrow B$
3. $A \to \overline{B}$
4. $\overline{A} \vee B$
5. $\overline{B \leftrightarrow A}$
6. $(A \to B \vee C) \wedge \overline{A \wedge C} \to A$
7. $(A \to B) \wedge (C \to D)$
8. $(A \to B) \leftrightarrow (\overline{B} \wedge C) \vee A$
9. $A \to (B \wedge C) \leftrightarrow (A \vee \overline{B}) \wedge (A \vee \overline{C})$
10. $(A \to \overline{(B \wedge A)}) \to A \vee C$

Задание 6. Установить эквивалентность формул с помощью таблиц истинности.

1. $A \vee B \wedge C$ и $(A \vee B) \wedge C$
2. $\overline{A} \vee \overline{B}$ и $\overline{A \wedge B}$
3. $A \to B$ и $\overline{A} \vee B$
4. $A \leftrightarrow B$ и $(\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$
5. $A \leftrightarrow B$ и $(\overline{A} \wedge \overline{B}) \vee (A \vee B)$
6. $\overline{A \leftrightarrow B}$ и $\overline{A} \leftrightarrow \overline{B}$
7. $(A \vee B) \wedge B$ иA
8. $A \vee (\overline{A} \vee \overline{B})$ иA
9. $A \vee (\overline{A} \vee B)$ иA
10. $A \wedge (\overline{A} \vee B)$ иB

Задание 7. Записать формулы в приведенном виде (содержащем только операции¬, ∧, ∨ над простыми переменными).

1. $A \vee \overline{B \vee C} \vee \overline{D}$
2. $A \to (B \leftrightarrow C)$
3. $(\overline{A} \to A \wedge B) \wedge C$
4. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge B$
5. $(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge D$
6. $\overline{\overline{(A \wedge B)} \wedge \overline{(C \wedge D)}} \wedge C$
7. $A \wedge (B \vee C) \to D$
8. $A \wedge (A \to B) \to B$
9. $\overline{\overline{(A \wedge B)} \to \overline{C}}$
10. $A \leftrightarrow B \wedge C$

Задание 8. Проверить самодвойственность функций.

1. $(\overline{x_1} \vee x_2 \vee x_3)x_4 \vee \overline{x_1}x_2\overline{x_3}$
2. $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3$
3. (0001001001100111)
4. $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3)(x_2 \vee x_3)$
5. $(x_1 \mid \overline{x}_2) \downarrow x_2$
6. $x_1 \oplus x_2 \oplus 1$
7. (1010)
8. $x_1x_2 \vee \overline{x_2}x_3$
9. (0101)
10. $\overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}$

Задание 9. Проверить монотонность функций.

1. $x_1 \to (x_2 \to x_3)$
2. (00110111)
3. $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1$
4. (01100111)
5. $\overline{\overline{x} \vee \overline{y}}$
6. (0011)
7. $xz(x \oplus z)$
8. $\overline{x} \to y$
9. $x \leftrightarrow \overline{y}$
10. $\overline{x} \to yz$

Задание 10. Проверить полноту следующих систем.

1. $\{x_1 \to x_2, x_1 \to \overline{x_2x_3}\}$
2. $\{\vee, \wedge\}$
3. $\{x_1\bar{x}_2, \bar{x}_1 \sim x_1x_3\}$
4. $\{0, 1, x_1(x_2 \sim x_3) \vee \bar{x}_1(x_1 \oplus x_3)\}$
5. $\{\bar{x}, (0010), (0100111001110001)\}$
6. $\{\overline{x_1} \oplus x_2, \overline{x_2}, x_1 \vee \overline{x_2}\}$
7. $\{x_1x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \to x_2\}$
8. $\{x_1 \to x_2, 0, x_1 \sim x_2\}$
9. $\{x_1 \oplus x_2, \bar{x}_1\}$
10. $\{x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3, 0, 1\}$

Задание 11. На множестве $M = \{1,2,3,\ldots,15\}$ заданы предикаты: $A(x)$ – «x – чётное число», $B(x)$ – «x делится нацело на 3», $C(x)$ – «x – число простое», $D(x)$ – «x не делится на 5». Найтии изобразить при помощи диаграмм Эйлера-Венна множества истинности предикатов $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$, $D(x)$ и следующих сложных предикатов:

1. а) $A(x) \vee \overline{B(x)}$; б) $A(x) \wedge C(x) \wedge D(x)$; в) $D(x) \to A(x)$.
2. а) $B(x) \wedge D(x)$; б) $B(x) \vee A(x) \vee D(x)$; в) $\overline{C(x)} \to B(x)$.
3. а) $\overline{C(x)} \vee A(x)$; б) $A(x) \wedge B(x) \wedge C(x)$; в) $B(x) \to D(x)$.
4. а) $\overline{D(x)} \wedge C(x)$; б) $B(x) \vee \overline{C(x)} \vee D(x)$; в) $\overline{A(x)} \to C(x)$.
5. а) $B(x) \vee C(x)$; б) $\overline{A(x)} \wedge B(x) \wedge D(x)$; в) $C(x) \to D(x)$.
6. а) $\overline{A(x)} \vee D(x)$; б) $B(x) \wedge C(x) \wedge A(x)$; в) $D(x) \to \overline{B(x)}$.
7. а) $C(x) \wedge B(x)$; б) $A(x) \vee \overline{B(x)} \vee D(x)$; в) $A(x) \to C(x)$.
8. а) $\overline{B(x)} \vee D(x)$; б) $A(x) \wedge \overline{C(x)} \wedge B(x)$; в) $DB(x) \to A(x)$.
9. а) $A(x) \vee C(x)$; б) $B(x) \wedge C(x) \wedge \overline{D(x)}$; в) $\overline{C(x)} \to D(x)$.
10. а) $\overline{C(x)} \wedge D(x)$; б) $\overline{A(x)} \wedge B(x) \wedge C(x)$; в) $\overline{D(x)} \to B(x)$.

Задание 12. Для следующей теоремы найдите теоремы, то есть верные утверждения, обратные и противоположные ей (если они есть), и теорему, противоположную обратной.

1. Если a=0 и b=0, то $a^2+b^2=0$ (a, b - действительные числа).

2. Если a делится на b и b делится на c, то a делится на c (a, b, c - целые числа).

3. Если ab делится на c и a не делится на c, то b делится на c (a, b, c - целые числа).

4. Если a делится на c и b делится на c, то a+b делится на c (a, b, c - целые числа).

5. Если два угла вписаны в окружность и опираются на одну и ту же дугу, то они равны между собой.

6. Если у четырехугольника две противоположные стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.

7. Если две хорды принадлежат равным кругам и равны между собой, то они одинаково удалены от центров этих кругов.

8. Если плоскость α перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

9. Если плоскость α проходит через прямую a, перпендикулярно плоскости β, то плоскости α и β перпендикулярны между собой.

10. Если четырехугольник является параллелограммом, то диагонали в нем пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Задание 13. В высказывании вместо многоточия вставьте одно из выражений: «необходимо, но не достаточно», «достаточно, но не необходимо», «необходимо и достаточно» так, чтобы получилось истинное высказывание.

1. a - четное число ... для того, чтобы 3a было четным числом (a - целое число).

2. a делилось на c ... для того, чтобы ab делилось на c (a, b, c - целые числа).

3. a и b делятся на c ... для того, чтобы a+b делилось на c (a, b, c - целые числа).

4. $x>1$ ... для того, чтобы $x^2 - 1 > 0$.

5. a параллельна b и b параллельна c ... для того, чтобы a параллельна c (a, b. c - прямые).

6. Совпадение центров вписанной и описанной около треугольника окружностей ... для того, чтобы треугольник был правильным.

7. $\alpha = \beta$ ... для того, чтобы $\sin\alpha = \sin\beta$.

8. Для того, чтобы четырехугольник был прямоугольником, ..., чтобы все его углы были равны.

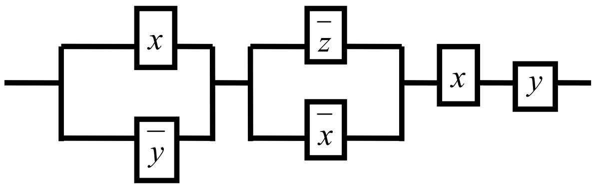
9. Для того, чтобы четырехугольник был параллелограммом, ... все его стороны были равны.

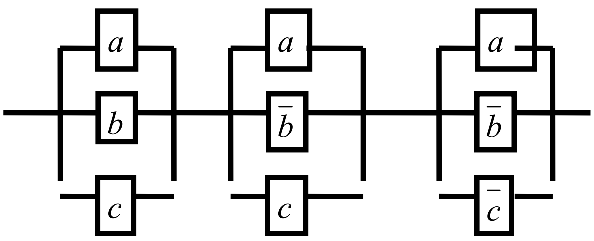
10. Для того, чтобы в прямоугольном треугольнике катет составлял половину гипотенузы, ... чтобы угол, лежащий против этого катета, был равен 30^0.

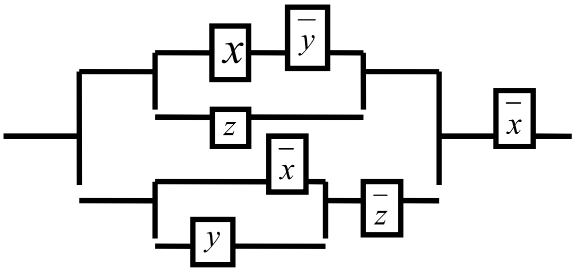
Задание 14. Для следующего высказывания найти предикат (одноместный или многоместный), который обращается в данное высказывание при замене предметных переменных подходящими значениями из соответствующих областей.

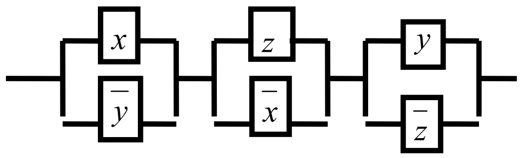
1. «3 + 4 = 7».
2. «Вера и Надежда – сестры».
3. «Город Саратов находится на берегу Волги».
4. «$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$»
5. «А.С. Пушкин - великий русский поэт».
6. «$3^2 + 4^2 = 5^2$».
7. «Река Индигирка впадает в озеро Байкал».
8. «$\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}=1$».
9. «17 + 10 = 27».
10. «Игорь и Александр – братья».

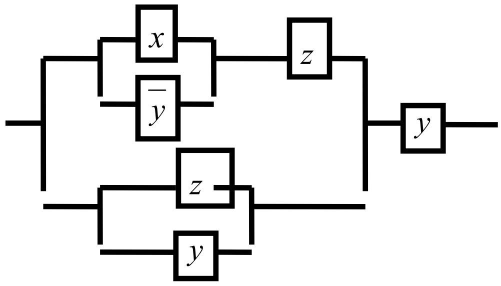
Задание 15. Упростить схемы.

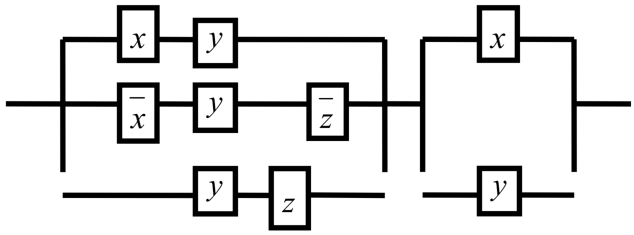
1.


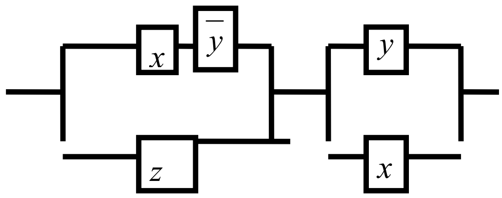
2.


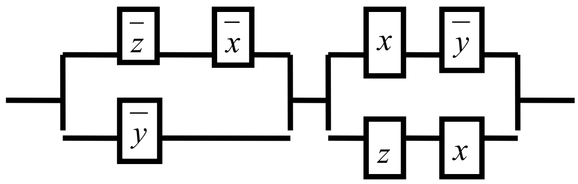
3.


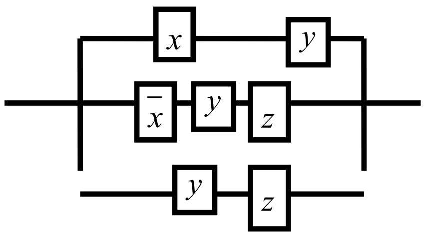
4. 

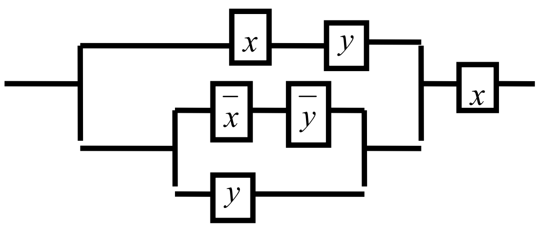
5. 

6. 

7. 

8. 

9. 

10. 

Задание 16. Решить сравнения.

1. $28x \equiv 35 \pmod{36}$
2. $25x \equiv 45 \pmod{55}$
3. $10x \equiv 13 \pmod{23}$
4. $2x \equiv 5 \pmod{17}$
5. $21x \equiv 36 \pmod{56}$
6. $12x \equiv 46 \pmod{21}$
7. $7x \equiv 2 \pmod{13}$
8. $115x \equiv 85 \pmod{355}$
9. $18x \equiv 25 \pmod{42}$
10. $7x \equiv 11 \pmod{15}$

5. КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

Задача 1[1]. Даны множества A и B. Изобразить и записать с указанием характеристического свойства результат каждой операции:

а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $A \setminus B$; г) $B \setminus A$; д) $\overline{A}$; е) $\overline{B}$; ж) $A \times B$; з) $B \times A$.

1. $A = \{x | x \in R, -5 < x \le 6\}$, $B = \{x | x \in R, -2 \le x < 4\}$.
2. $A = \{x | x \in R, -3 \le x < 4\}$, $B = \{x | x \in R, -1 < x \le 6\}$.
3. $A = \{x | x \in R, x > -2\}$, $B = \{x | x \in R, 1 \le x < 4\}$.
4. $A = \{x | x \in R, -4 \le x \le 6\}$, $B = \{x | x \in R, -3 < x \le 7\}$.
5. $A = \{x | x \in R, 1 < x \le 5\}$, $B = \{x | x \in R, x > 2\}$.
6. $A = \{x | x \in R, -3 \le x < 1\}$, $B = \{x | x \in R, 0 < x \le 4\}$.
7. $A = \{x | x \in R, x > 2\}$, $B = \{x | x \in R, -5 \le x \le 8\}$.
8. $A = \{x | x \in R, -4 < x \le 0\}$, $B = \{x | x \in R, -2 \le x \le 6\}$.
9. $A = \{x | x \in R, x \le 1\}$, $B = \{x | x \in R, -4 \le x < 3\}$.
10. $A = \{x | x \in R, x > -3\}$, $B = \{x | x \in R, 1 < x \le 5\}$.

Задача 2. Составив таблицы истинности, выясните, равносильны ли следующие формулы алгебры высказываний.

1. $F(x,y,z) = ((x \rightarrow \overline{y}) \vee z) \wedge (\overline{(x \wedge y)} \leftrightarrow \overline{z})$

$G(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee ((x \rightarrow \overline{y}) \wedge \overline{z})$.

2. $F(x,y,z) = (\overline{(x \leftrightarrow (y \vee \overline{z}))} \wedge \overline{x}) \rightarrow (\overline{(x \vee \overline{y})} \leftrightarrow z)$

$G(x,y,z) = x \vee (y \rightarrow z)$.

3. $F(x,y,z) = \overline{(((\overline{y} \vee \overline{z}) \leftrightarrow x) \wedge (\overline{x} \wedge (y \rightarrow \overline{z})))}$

$G(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee \overline{x} \vee (x \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y})$

4. $F(x,y,z) = \overline{(\overline{x} \leftrightarrow ((y \vee \overline{z}) \rightarrow \overline{(x \vee y)}))}$

$G(x,y,z) = ((\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge z)) \wedge \overline{y}$.

5. $F(x,y,z) = ((x \wedge (y \rightarrow z)) \vee \overline{(x \vee \overline{z})}) \leftrightarrow \overline{(\overline{y} \leftrightarrow z)}$

$G(x,y,z) = \overline{(x \rightarrow z)} \vee y$.

6. $F(x,y,z) = ((x \vee y) \vee z) \wedge ((x \wedge y) \leftrightarrow z)$

$G(x,y,z) = ((x \rightarrow \overline{y}) \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge y \wedge z)$.

7. $F(x,y,z) = (\overline{x} \wedge \overline{((\overline{z} \vee y) \leftrightarrow x)}) \rightarrow (z \leftrightarrow \overline{(x \vee \overline{y})})$

$G(x,y,z) = (y \rightarrow z) \vee x$.

8. $F(x,y,z) = ((\overline{x} \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge z)) \wedge \overline{y}$

$G(x,y,z) = \overline{(\overline{x} \leftrightarrow ((y \vee \overline{z}) \rightarrow \overline{(x \vee \overline{y})}))}$.

[1] Каждый студент обязан выполнить все девять заданий, но работа выполняется по одному из девяти вариантов. Варианты соответствуют последней цифре номера зачетки

9. $F(x,y,z) = (x \wedge y \wedge z) \vee \bar{x} \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z})$

$G(x,y,z) = ((\overline{(\bar{y} \vee \bar{z}) \leftrightarrow x) \wedge (\bar{x} \wedge (y \to \bar{z})}))$.

10. $F(x,y,z) = y \vee (\overline{x \to z})$

$G(x,y,z) = ((x \wedge (y \to z)) \vee (\overline{x \vee \bar{z}})) \leftrightarrow (\overline{\bar{y} \leftrightarrow z})$.

Задача 3. Упростить формулы.

1. $((p \to q) \to p) \to \bar{p}$
2. $(A_1 \to A_2) \wedge (A_2 \to A_3) \to (A_3 \to A_1)$
3. $(A_1 \wedge A_3) \vee (A_1 \to \bar{A}_3) \vee (A_2 \wedge A_3) \vee (\bar{A}_1 \wedge A_2 \wedge A_3)$
4. $((A \to B) \wedge (B \to \bar{A})$
5. $A \vee \neg(B \wedge \bar{C}) \vee \neg(\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$
6. $(A \to B) \to (\bar{B} \leftrightarrow \bar{A})$
7. $(A \to \bar{B} \wedge \bar{A}) \vee B$
8. $A_1 \wedge A_2 \wedge (A_3 \vee \bar{A}_3)$
9. $A_1 \vee (A_2 \wedge \bar{A}_1)$
10. $A_2 \wedge (A_1 \vee \bar{A}_2)$

Задача 4. Записать формулы в ДНФ и СДНФ.

1. $(A \to B) \to C$
2. $(A \vee B) \wedge (C \vee D)$
3. $(A \wedge B) \vee (C \wedge D) \to C$
4 $\overline{(A \wedge B) \vee C}$
5. $A \wedge B \vee C \wedge B$
6. $(A \to (A \leftrightarrow B)) \wedge C$
7. $A \wedge (B \wedge C)$
8. $A \vee B \to C \wedge A$
9. $(A \to B) \leftrightarrow (\bar{A} \vee B)$
10. $((A \to B) \wedge C) \vee \bar{A} \wedge B$

Задача 5. Построить полином Жегалкина для функций.

1. $f = (00101101)$
2. $(x_1 \downarrow x_2) \mid x_3$
3. $(x_1 \to x_2) \leftrightarrow (x_2 \leftrightarrow x_3)$
4. $(x_1 \to x_3)(x_2 \oplus x_3)$
5. $\overline{x_1 x_3} \vee x_2 \bar{x}_3$
6. $(x \leftrightarrow y) \wedge (y \leftrightarrow z)$
7. $x \leftrightarrow y \leftrightarrow \bar{z}$
8. $x \wedge y \leftrightarrow x \wedge z$
9. $(x \to \bar{y}) \vee (\overline{x \vee y})$
10. $\overline{x \vee \bar{y}}$

Задача 6. На множестве M бинарное отношение $R \subseteq M \times M$ задано характеристическим свойством. Представить отношение R другими возможными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

1. $M = \{1,2,3,4,5\}$, $R = \{(x;y) | x + y$ – чётное; $x, y \in M\}$
2. $M = \{-2;-1,0,1,2,3\}$, $R = \{(x;y) | x + y = 3$; $x, y \in M\}$
3. $M = \{1,2,3,4,5,6\}$, $R = \{(x;y) | x - y$ делится на 2; $x, y \in M\}$
4. $M = \{-1,0,1,2,3,4\}$, $R = \{(x;y) | x + y < 4$; $x, y \in M\}$

5. $M = \{0;1;2;3;4\}$, $R = \{(x;y) | x - y$ делится на 3; $x, y \in M\}$

6. $M = \{1,2,3,4,5\}$, $R = \{(x;y) | x + y < 5$; $x, y \in M\}$

7. $M = \{-3,-2,0,1,2,3\}$, $R = \{(x;y) | x \cdot y \geq 0$; $x, y \in M\}$

8. $M = \{0;1;2;3;4\}$, $R = \{(x;y) | x + y$ делится на 3; $x, y \in M\}$

9. $M = \{1,2,3,4,5\}$, $R = \{(x;y) | x - y > 1$; $x, y \in M\}$

10. $M = \{-1;-2;0;1,2,3\}$, $R = \{(x;y) | |x - y| = 2$; $x, y \in M\}$

Задача 7. Прочитайте следующие высказывания и определите, какие из них истинные, а какие ложные, считая, что все переменные пробегают множество действительных чисел.

1. $(\forall x)(\exists y)\ (x + y = 7)$
2. $(\exists y)(\forall x)\ (x + y = 7)$
3. $(\exists x)(\exists y)\ (x + y = 7)$
4. $(\forall x)(\forall y)\ (x + y = 7)$
5. $((\forall x)(\forall y)\ (x + y = 3)) \to (3 = 4)$
6. $((\forall x)(\exists y)\ (x + y = 3)) \to (3 = 4)$
7. $((\exists x)(\forall y)\ (x + y = 3)) \to (3 = 4)$
8. $((\exists x)(\exists y)\ (x + y = 3)) \to (3 = 4)$
9. $(\forall a)(\exists b)\ (a - b = 5)$
10. $(\exists m)(\forall n)\ (m - n = 4)$

Задача 8.

1. Записать полную и приведенную систему вычетов по модулю 12.
2. Записать полную и приведенную систему вычетов по модулю 14.
3. Записать полную и приведенную систему вычетов по модулю 15.
4. Записать полную и приведенную систему вычетов по модулю 16.
5. Записать полную и приведенную систему вычетов по модулю 18.
6. Решить сравнение: $7x \equiv 10 \pmod{13}$.
7. Решить сравнение: $16x \equiv 20 \pmod{28}$.
8. Решить сравнение: $15x \equiv 23 \pmod{40}$.
9. Решить сравнение: $20x \equiv 8 \pmod{32}$.
10. Решить сравнение: $12x \equiv 46 \pmod{21}$.

Задача 9.

1.Напишите разложение по формуле бинома Ньютона $(m+n)^8$.

2.Найдите в разложении по формуле бинома Ньютона $(m+n)^6$ средний член.

3.Вычислите:

а) P_8; б) A_5^3; в) C_5^3.

4.Сколько можно сыграть аккордов из четырех нот, выбранных из семи заданных различных нот?

5.Напишите разложение по формуле бинома Ньютона $(x+y)^6$.

6. Напишите разложение по формуле бинома Ньютона $(m+n)^7$.

7.Найдите в разложении по формуле бинома Ньютона $(m+n)^8$ средний член.

8.Вычислите:

а) P_9; б) A_6^2; в) C_6^4.

9.Сколько можно сыграть аккордов из трех нот, выбранных из семи заданных различных нот?

10. Напишите разложение по формуле бинома Ньютона $(m+n)^9$.

6. ВОПРОСЫ ДЛЯ ПОДГОТОВКИ К ИТОГОВОЙ АТТЕСТАЦИИ

1. Операции над множествами.
2. Теоретико–множественные диаграммы.
3. Формы представления Булевых функций.
4. Минимизация логической функции.
5. Классы логических функций.
6. Основные законы логики Буля.
7. Логика высказываний.
8. Построение доказательств в логике высказываний.
9. Предикаты и кванторы. Операции над ними.
10. Операции двоичного сложения.
11. Рекуррентные соотношения.
12. Биномиальные коэффициенты, их комбинаторный смысл.
13. Полиномиальные коэффициенты, их комбинаторный смысл.
14. Понятие выборки. Число k-выборок из n-множества.
15. Понятие размещения. Число k-размещений из n-множества.
16. Понятие перестановки. Число перестановок n-множества.
17. Понятие сочетания. Число сочетаний из n по k.
18. Комбинаторный смысл чисел Стирлинга первого рода.
19. Комбинаторный смысл чисел Стирлинга второго рода.
20. Алгебра вычетов по модулю.
21. Операции над вычетами.
22. Обратимые вычеты.
23. Понятие графа и мультиграфа, способы их представления.
24. Степень вершины графа.
25. Теорема о сумме степеней вершин графа и ее следствие.
26. Связные графы.
27. Компоненты связности графа.
28. Эйлеровы графы. Критерий эйлеровости.
29. Планарные графы.
30. Раскраска вершин графа.
31. Двудольные графы.
32. Теорема Кенига.
33. Понятия процессов кодирования и декодирования информации.
34. Понятия криптологии и криптографии.
35. Принципы математического алфавитного кодирования информации.
36. Смысл проблемы взаимной однозначности алфавитного кодирования.
37. Первый и второй достаточные признаки взаимной однозначности алфавитного кодирования.
38. Принцип построения двоичного алфавитного кодирования.
39. Теорема Маркова.
40. Свойства самокорректирующихся кодов.
41. Процесс кодирования Хемминга.

42.Понятие и определение конечного автомата.
43.Способы задания конечного автомата.
44.Канонические уравнения конечного автомата.
45.Понятия вычислимой функции и алгоритма.
46.Свойства алгоритмов.
47.Понятие рекурсивных функций.
48. Нормальный алгоритм Маркова.
49.Машины Тьюринга и алгоритм Тьюринга.
50.Тезис Черча-Тьюринга.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1.Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. - Саратов, 1991.

2.Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Изд-во МАИ, 1992.

3.Новиков Ф.А.Дискретная математика для программистов. Учебник. - СПб, М.: Харьков, Питер. 2002.

4.Судоплатов С.В. Элементы дискретной математики. Учебник. - М.ИНФРА-М.: Новосибирск, Изд-во НГТУ, 2002.

5.Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. Уч. пособие для вузов. - М.: Высш.шк., 2002.

Подписано в печать 04.05.2014 г. Тираж 500 экз.
Формат изд. 60x84/16. Объем 3,75 усл. печ. л.
Отпечатано в типографии “ИП Волков А.И.”
Райымбека 212/1, оф. 319. Тел.: 330-03-12, 330-03-13